f. 134

~~Gregorio~~ D. Iuste Bonilla

Geometria elemental
de
D. Juan Cortazar por la
gracia de Dios 41

L

Numeri regunt mundum
27

~~67-5 no 20278~~

~~76-B-3.~~

PRÓLOGO.

La octava edicion de nuestro tratado de Geometría elemental se distingue de la séptima en algunas pocas mejoras en los detalles. Conservamos en ella las adiciones que hicimos en la sesta edicion, de las que la principal es el estudio elemental de la elipse, de la parábola y de la hélice, que son las curvas mas usadas en la práctica de las matemáticas despues del círculo. De este modo queda nuestro tratado tan completo como debe ser un libro de Geometría elemental, cualquiera que sea el objeto con que se estudie esta ciencia: y si alguien, en vista del poco volúmen de este libro, dudare de nuestro aserto, le remitiremos al programa de la misma ciencia publicado por el Gobierno francés en 1852, reproducido en 1855, y vigente hasta ahora, tanto para los Liceos, ó escuelas en que se da la segunda enseñanza, como para los aspirantes á las escuelas Politécnica, Normal superior, etc., y verá que no hay materia de alguna importancia en dicho programa, que no esté tratada con la suficiente estension en nuestra obra; la cual, por otra parte, es la única conforme al escelente programa publicado por el Gobierno español en 1850, programa que se diferencia poco del citado ya del Gobierno francés, prescindiendo del estudio elemental de las tres curvas elipse, parábola y hélice, que este contiene y no aquel, y que nosotros hemos creido conveniente añadir.

ERRATAS.

Pág.	*Línea.*	*Dice.*	*Debe decir.*
29	17	*B*	*D*
31	6	*EBF*	*EDF*

En la fig. 219 faltan en los estremos del diámetro las letras *A* y *C*.

GEOMETRIA ELEMENTAL.

INTRODUCCION.

1. Todo cuerpo ú objeto material es largo, ancho y grueso; ó en otros términos, todo cuerpo tiene *longitud, latitud* y *profundidad*.

Estas tres propiedades de los cuerpos se llaman sus *dimensiones*. Luego todo cuerpo tiene tres dimensiones.

Los límites de los cuerpos se llaman *superficies*. Las superficies no tienen mas que dos dimensiones, longitud y latitud.

Los límites de las superficies se llaman *lineas*. Las lineas solo tienen una dimension, la longitud.

Los estremos de las líneas se llaman *puntos*. Los puntos no tienen dimension alguna; y por lo mismo se consideran como tales las porciones sumamente pequeñas de que se componen las líneas.

2. La magnitud de un cuerpo, de una superficie ó de una línea se llama su *estension*. Por consiguiente hay tres clases de estension: estension de tres dimensiones ó de los cuerpos, estension de dos dimensiones ó de las superficies, y estension de una dimension ó de las líneas.

La estension limitada se llama *figura*; y tambien se llama asi la reunion de líneas trazadas para la demostracion de un teorema ó resolucion de un problema.

3. La línea se divide en *recta, quebrada* y *curva*.

No es posible definir bien la línea recta, pero tampoco es necesario; pues todos sabemos lo que es dicha línea.

Línea *quebrada* es la línea que se compone de dos ó mas líneas rectas, sin ser toda una sola recta: tal es la *ABCD* (*figura* 1).

Línea *curva* es aquella línea de la que ninguna porcion, por pequeña que sea, es línea recta: tal es la *AB* (*fig.* 2).

Se dice que varios puntos *están en una misma direccion*, cuando están en una misma línea recta.

4. Se llama *distancia* entre dos puntos la línea *recta* comprendida entre ellos.

5. Se llama *plano* ó *superficie plana* aquella superficie en la cual tomando dos puntos cualesquiera, la recta que pasa por ellos, coincide enteramente con la superficie.

Superficie *quebrada* es la superficie compuesta de dos ó mas superficies planas, sin ser toda una sola superficie plana.

Superficie *curva* es aquella superficie de la cual ninguna porcion, por pequeña que sea, es superficie plana.

AXIOMAS.

1.° *La linea recta es la linea mas corta que se puede tirar entre dos puntos.*

2.° *Por dos puntos no puede pasar mas que una sola linea recta*, ó lo que es igual, *dos puntos determinan la posicion de una recta.*

3.° *Dos rectas no pueden cortarse mas que en un punto.*

4.° *Dos rectas que tienen dos puntos comunes, coinciden en toda su estension indefinida.*

6. Se llama *circunferencia* una línea curva cerrada, cuyos puntos están todos en un plano, y equidistan de un punto interior llamado *centro*.

Circulo es la porcion de plano limitada por la circunferencia. A veces á la circunferencia se le da tambien el nombre de círculo.

Radio es una recta *OA* tirada desde el centro á la circunferencia (*fig.* 3).

Cuerda es una recta *AC*, que une dos puntos de la circunferencia.

Diámetro es una cuerda *BC* que pasa por el centro.

Arco es una porcion *AB* de la circunferencia.

Todos los radios de un mismo circulo son iguales: pues los radios son las distancias del centro á los diferentes puntos de la circunferencia, y estas distancias son iguales, segun la definicion de la circunferencia.

Todos los diámetros de un mismo circulo son iguales; pues cada uno vale dos radios.

Para trazar ó tirar una recta, se emplea la regla, y para trazar ó describir una circunferencia, se emplea el compás.

7. Se llama *Geometria* la ciencia que enseña á resolver los problemas de la estension.

La Geometría elemental, que forma nuestro actual objeto, solo se ocupa de la línea recta y de la circunferencia, de las superficies planas terminadas por estas líneas, de ciertas superficies curvas que se originan de ellas, y de los espacios terminados por estas superficies.

Le Geometría se divide en Geometría *plana* y Geometría del *espacio*.

La Geometría plana trata de las figuras planas, es decir, de las figuras cuyos puntos están todos en un plano.

La Geometría del espacio considera las figuras cuyos puntos no están todos en un plano.

DIVISION DE LA GEOMETRÍA.

GEOMETRÍA PLANA.	GEOMETRÍA DEL ESPACIO.
LIBRO I.	LIBRO I.
Linea recta y ángulos.	*Planos, ángulos diedros y ángulos poliedros.*
LIBRO II.	LIBRO II.
Polígonos.	*Poliedros.*
LIBRO III.	LIBRO III.
Circulo.	*Los tres cuerpos redondos.*
LIBRO IV.	LIBRO IV.
Polígonos semejantes.	*Poliedros semejantes.*
LIBRO V.	LIBRO V.
Areas de los polígonos y del círculo.	*Areas y volúmenes de los poliedros y cuerpos redondos.*

GEOMETRÍA PLANA.

LIBRO PRIMERO.

LÍNEA RECTA Y ÁNGULOS.

CAPÍTULO I.

Perpendiculares y oblicuas.

8. Se llama *ángulo* la separacion ó abertura de dos rectas indefinidas *CA* y *CB* (*fig.* 4) que se encuentran en un punto *C*, llamado *vértice* del ángulo.

Las dos rectas indefinidas *CA* y *CB*, que forman el ángulo, se llaman *lados* del ángulo.

Un ángulo se designa con tres letras, una de cada lado y la del vértice, colocando esta en medio. Si un ángulo está solo, se puede designar con la letra del vértice. Asi, el ángulo formado por las rectas *CA* y *CB*, se designará *ACB* ó *BCA* ó *C*.

Debiendo considerarse como indefinidos los dos lados del ángulo, resulta que la magnitud de un ángulo no depende de la de sus lados, sino de la separacion de estos; y asi, dos ángulos serán iguales, cuando coincidiendo el vértice y un lado, coincida tambien el otro lado, aunque los lados del uno sean desiguales á los lados del otro.

9. Se llaman ángulos *adyacentes* dos ángulos que tienen un lado comun, y los otros dos lados en línea recta. Asi, los ángulos *ACE* y *BCE* (*fig.* 5) son adyacentes; y tambien lo son los ángulos *ACD* y *BCD*.

10. Se dice que una recta *DC* (*fig.* 5) es *perpendicular* á otra *AB*, cuando los ángulos adyacentes *ACD* y *BCD* que forman las dos, son iguales.

Se dice que una recta *EC* es *oblicua* á otra *AB*, cuando los ángulos adyacentes *ACE* y *BCE* que forman, son desiguales.

11. Se llama *ángulo recto* cualquiera de los dos ángulos adyacentes que forma una recta con otra á la cual es perpendicular. Asi, los ángulos adyacentes iguales *ACD* y *BCD* (*fig.* 5) son rectos.

TEOREMA 1 (*fig.* 5).

Por un punto de una recta no se puede levantar mas que una sola perpendicular á dicha recta.

Sea *AB* la recta y *C* el punto: digo que por este punto no se puede levantar á la recta *AB* mas que una sola perpendicular *CD*.

En efecto, siendo la *CD* perpendicular á la *AB*, los ángulos *ACD* y *BCD* son iguales. Otra cualquiera recta *CE*, que pase por el punto *C*, formará con la *AB* dos ángulos, el uno *ACE* mayor que el recto *ACD*, y el otro *BCE* menor que el recto *BCD*; luego dichos dos ángulos *ACE* y *BCE* son desiguales, y por tanto la *CE* es oblícua á la *AB*.

TEOREMA 2 (*fig.* 6).

Dos ángulos rectos son iguales, aunque no sean adyacentes.

Sean los dos ángulos rectos *ABC* y *DEF*: digo que son iguales.

En efecto, imaginemos que el ángulo recto *DEF* se coloque sobre el ángulo recto *ABC*, de modo que el punto *E* caiga sobre el punto *B*, y que la recta *EF* coincida con la *BC*: como en un punto *B* de una recta *BC* no se puede levantar á esta recta mas que una sola perpendicular, la recta *ED* coincidirá con la *BA*; y por consiguiente los ángulos rectos *DEF* y *ABC* son iguales.

12. Se llama ángulo *agudo* el ángulo menor que el recto, y ángulo *obtuso* el ángulo mayor que el recto.

TEOREMA 3 (*fig.* 5).

La suma de dos ángulos adyacentes ACE y BCE *es igual á dos ángulos rectos* (a).

Para demostrarlo, levanto en el vértice *C* la perpendicular *CD* á la *AB*, y tendré

$$ACE = ACD + DCE,$$
$$BCE = BCD - DCE:$$

sumando estas igualdades ordenadamente, será

$$ACE + BCE = ACD + BCD;$$

(a) Todos los teoremas en que, por abreviar, se indiquen las partes de la figura, se deben enunciar en primer lugar como si tales partes no estuviesen indicadas; y volver en seguida á enunciar, refiriéndose á la figura, la hipótesi y la conclusion del teorema. Asi, el teorema actual se desenvolverá del modo siguiente: *La suma de dos ángulos adyacentes es igual á dos ángulos rectos*. Sean los dos ángulos adyacentes *ACE* y *BCE*: digo que su suma es igual á dos ángulos rectos. Para demostrarlo, etc.

es decir, que la suma de los dos ángulos adyacentes *ACE* y *BCE* es igual á dos ángulos rectos.

Corolarios. 1.° *Los cuatro ángulos* ACD, BCD, BCE *y* ACE (*fig.* 7), *que forma una recta con otra á la cual es perpendicular, son rectos*: pues, siendo la *DE* perpendicular á la *AB*, los dos ángulos *ACD* y *BCD* son rectos; luego sus adyacentes *ACE* y *BCE* son tambien rectos.

De aquí resulta que la recta *AB* forma con la *ED* dos ángulos adyacentes *BCD* y *BCE* iguales, y que por tanto dicha recta *AB* es perpendicular á la *DE*: luego, *si una recta es perpendicular á otra, esta es perpendicular á la primera.*

2.° *La suma de los ángulos* consecutivos ACD, DCE, ECF y FCB (*fig.* 8), *formados hácia un mismo lado de una recta* AB, *es igual á dos ángulos rectos*: pues la suma de los ángulos *ACD, DCE* y *ECF* es igual al ángulo *ACF;* luego la suma de todos los ángulos consecutivos propuestos equivale á la de los dos ángulos adyacentes *ACF* y *BCF*, que es igual á dos rectos.

3.° *La suma de todos los ángulos* consecutivos ACD, DCE, ECF, FCG, *etc.* (*fig.* 9), *formados al rededor de un punto* C *por varias rectas que salen de este punto, es igual á cuatro rectos:* pues prolongando una de dichas rectas *AC* en sentido contrario al suyo, la suma de todos los ángulos consecutivos que están hácia un lado de la recta *AB*, es igual á dos rectos, y la suma de todos los ángulos consecutivos que están hácia el otro lado de la misma recta, es tambien igual á dos rectos: luego la suma de todos los ángulos propuestos es igual á cuatro rectos.

4.° *Un ángulo cualquiera es menor que dos ángulos rectos:* pues prolongando un lado de dicho ángulo, resulta otro ángulo adyacente al propuesto, y entre los dos valen dos ángulos rectos.

13. Si la suma de dos ángulos es igual á un ángulo recto, cada uno se llama *complemento* del otro; ó bien los dos se llaman *complementarios.*

Si la suma de dos ángulos es igual á dos ángulos rectos, cada uno se llama *suplemento* de otro; ó bien los dos se llaman *suplementarios.*

Dos ángulos que tienen el mismo complemento, ó el mismo suplemento, son iguales; pues en el primer caso á los dos les falta la misma cantidad para valer un ángulo recto, y en el segundo caso á los dos les falta la misma cantidad para valer dos ángulos rectos.

14. Se llaman ángulos *opuestos por el vértice* dos ángulos de los que el uno está formado por las prolongaciones de los lados del otro.

TEOREMA 4 (*fig.* 10).

Los ángulos ACE y DCB *opuestos por el vértice son iguales.*

En efecto, el ángulo *ACE* tiene por suplemènto á su adyacente *ACD*, y el ángulo *DCB* tiene tambien por suplemento á su adyacente *ACD*; luego los ángulos *ACE* y *DCB*, que tienen el mismo suplemento, son iguales.

TEOREMA 5 (*fig.* 11).

Desde un punto A *tomado fuera de una recta* DE *no se puede bajar á esta recta mas que una sola perpendicular* AB.

Tiremos otra recta cualquiera *AC* desde el punto *A* á la recta *DE*, prolonguemos la *AB*, tomemos en su prolongacion la parte *A'B*=*AB*, y juntemos los puntos *C* y *A'*. Doblando la figura por la *BC*, caerá la *AB* sobre la *BA'*, por ser iguales los ángulos rectos *ABC* y *A'BC*; el punto *A* caerá sobre el *A'*, por ser iguales las rectas *AB* y *A'B*; luego la recta *CA* y la *CA'*, que tienen comunes sus estremos, coincidirán; luego el ángulo *ACB* es igual al *BCA'*, ó bien el ángulo *ACB* es la mitad del *ACA'*; y como este ángulo es menor que dos ángulos rectos, el *ACB* es menor que un ángulo recto; luego la *AC* es oblicua á la *DE* (*a*).

CAPÍTULO II.

Paralelas.

15. Si á dos rectas cualesquiera *AB* y *CD* (*fig.* 12) corta otra recta *EF*, esta toma el nombre de *secante* ó *transversal.*

Los cuatro ángulos *AGH*, *BGH*, *CHG* y *DHG* se llaman ángulos *internos*, y los otros cuatro ángulos *AGE*, *BGE*, *CHF* y *DHF* se llaman *esternos.*

Los ángulos *EGB* y *EHD*, uno esterno y otro interno, de un mismo lado de la secante, y que no son adyecentes, se llaman ángulos *correspondientes*. Por lo tanto son tambien ángulos correspondientes los *AGE* y *CHE*, los *DHF* y *BGF*, los *CHF* y *AGF*.

Los ángulos internos *BGH* y *CHG* de diferente lado de la secante, y no adyacentes, se llaman ángulos *alternos*. Segun esto, son tambien ángulos alternos los *AGH* y *DHG* (*b*).

(*a*) Si siguiendo una marcha diferente de la que nosotros seguimos, se hubiese demostrado antes del teorema 5 el teorema 15, el teorema 5 se demostraría con mayor sencillez, sin necesidad de doblar la figura por la recta *BC*. Asi pues, el objeto que tenemos, al doblar la figura, es el suplir la falta del teorema 15, haciendo en la figura del teorema 5 el mismo razonamiento que en la del teorema 15.

(*b*) Es enteramente inútil la distincion de los ángulos alternos en *alternos internos* y *alternos esternos*, porque puede evitarse, y se evita siempre, la consideracion de estos últimos.

16. Se llaman *paralelas* dos rectas que están en un mismo plano, y que por mas que se prolonguen, no se encuentran.

La existencia de estas rectas se demuestra por la proposicion siguiente.

TEOREMA 6.

Dos rectas perpendiculares á una tercera son paralelas: pues si dichas rectas se encontrasen, desde el punto de su encuentro se podrian tirar dos perpendiculares á una recta; lo que es imposible.

TEOREMA 7 (*fig.* 13).

Si los ángulos alternos AGH *y* DHG *son iguales, las rectas* AB *y* CD *son paralelas.*

Siendo iguales los ángulos alternos *AGH* y *DHG*, sus suplementos *BGH* y *CHG* serán tambien iguales; y al contrario [13].

Desde el punto medio *I* de la *HG* tiro la *IK* perpendicular á la *AB*, y la prolongo hasta que encuentre en *L* á la *CD*: hago ahora girar la figura *HIL*, en el mismo plano en que se halla, al rededor del punto *I* (*a*), hasta que la recta *IH* coincida con la *IG*, en cuyo caso el punto *H* caerá sobre el punto *G*, por ser iguales las dos rectas *IH* é *IG;* la recta *IL* coincidirá con la *IK*, por ser iguales los ángulos *HIL*, *KIG*, como opuestos por el vértice. Por ser iguales, segun la hipótesi, los ángulos *IHL, IGK*, la recta *HL* coincidirá con la *GK*, y por lo tanto el punto *L* caerá sobre el punto *K;* luego el ángulo *ILH* es igual al ángulo *IKG*; y como este es recto segun la construccion, el *HLI* será tambien recto: luego las dos rectas *AB* y *CD* son perpendiculares á la *KL*, y por tanto son paralelas.

TEOREMA 8 (*fig.* 13, *sin la* KL).

Si dos ángulos correspondientes cualesquiera EGB *y* EHD *son iguales, las rectas* AB *y* CD *son paralelas.*

El ángulo *EGB* es igual al *AGH*, por ser opuestos por el vértice; pero por hipótesi el ángulo *EGB* es igual al *EHD*: luego los ángulos alternos *AGH* y *GHD* son iguales; luego las rectas *AB* y *CD* son paralelas.

TEOREMA 9 (*fig.* 13, *sin la* KL).

Si la suma de los ángulos internos BGH *y* DHG *de un mismo lado de la secante es igual á dos rectos, las rectas* AB *y* CD *son paralelas.*

(*a*) Si hubiésemos colocado el teorema 16 antes del 7, la demostracion actual seria mas sencilla. Asi, el objeto del movimiento del triángulo *HIL* es el suplir la falta del teorema 16; observacion análoga á la que hemos hecho al demostrar el teorema 5.

(a') No puede tirarse mas que una perpendicular puesto que dos paralelas no pueden encontrarse mas en un solo punto y desde un punto solo puede tirarse una [illegible] la perpendicular asi

El ángulo *AGH* es suplemento del *BGH*; pero por hipótesi el ángulo *DHG* es suplemento del *BGH*; luego los dos ángulos alternos *AGH* y *DHG*, suplementos de uno mismo, son iguales: luego las rectas *AB* y *CD* son paralelas.

17. *Por un punto* H *dado fuera de una recta* AB (fig. 14) *no puede pasar mas que una sola paralela* CD *á dicha recta* AB; es decir, que otra cualquiera recta *HL*, que pase por dicho punto *H*, prolongada suficientemente encuentra á la *AB* (*a*).

Recíproco del 6. *Si dos rectas* AB *y* CD (fig. 14) *son paralelas, y una de ellas* AB *es perpendicular á una tercera recta* EF, *la otra* CD *tambien lo será.*

Pues si la *CD* no fuese perpendicular á la *EF*, por el punto *H* se podria tirar una recta *HL* perpendicular á la *EF*, y por tanto *HL* seria, segun el teorema directo, paralela á la *AB;* luego por el punto *H* pasarian dos paralelas á la *AB*, lo que es imposible.

Recíproco del 7. *Si las rectas* AB *y* CD (fig. 15) *son paralelas, los ángulos alternos* AGH y DHG *son iguales.*

Si el ángulo *AGH* no fuese igual al ángulo *DHG*, por el punto *G* se podria tirar una recta *IK*, que formase con la *EF* un ángulo *IGH* igual al *DHG*: dicha recta *IK* seria paralela á la *CD*, segun el teorema directo; luego por el punto *G* podrian pasar dos paralelas á la *CD*, lo que es imposible.

Recíproco del 8. *Si las rectas* AB *y* CD (fig. 15, sin la *IK*) *son paralelas, los ángulos correspondientes* EGB y EHD *son iguales.*

En efecto, el ángulo *EGB* es igual al ángulo *AGH*, por ser opuestos por el vértice; y como el ángulo *AGH* es igual al *EHD*, por ser alternos entre paralelas, se infiere que el ángulo *EGB* es igual al *EHD*.

Recíproco del 9. *Si las rectas* AB *y* CD (fig. 15, sin la *IK*) *son paralelas, la suma de los ángulos internos* BGH *y* DHG *de un mismo lado de la secante es igual á dos rectos.*

En efecto, la suma $BGH + AGH$ vale dos ángulos rectos; y pues el ángulo *AGH* es igual al *DHG* por ser alternos entre paralelas, se infiere que la suma $BGH + DHG$ es tambien igual á dos rectos.

TEOREMA 10 (*fig.* 16).

Dos rectas AB *y* CD *paralelas á una tercera* EF *son paralelas entre sí:* pues tirando una recta *MN* perpendicular á la *AB*, lo será á su paralela *EF*; y por serlo á esta, lo será á su paralela *CD*:

(*a*) Muchos esfuerzos se han hecho para demostrar con todo rigor este principio, llamada *Postulado* de Euclides, que la esperiencia lo demuestra con sencillez. En vista de la ineficacia de tales esfuerzos, admitiremos dicho principio, sin detenernos en demostraciones viciosas.

luego las dos rectas *AB* y *CD* son perpendiculares á la recta *MN*, y por consiguiente son paralelas.

TEOREMA 11 (*fig.* 17).

Dos ángulos, cuyos lados son respectivamente paralelos, son iguales ó suplementarios.

1.° Sean *BAC* y *DEF* los dos ángulos, cuyos lados son paralelos, y tienen dos á dos el mismo sentido: digo que estos ángulos son iguales.

Prolonguemos el lado *DE*, hasta que encuentre en *G* al lado *AC*: el ángulo *BAC* es igual al *DGC*, por ser correspondientes entre paralelas; el ángulo *DEF* es igual al *DGC* por la misma razon; luego los ángulos *BAC* y *DEF* son iguales.

2.° Sean los dos ángulos *BAC* y *GEH*, cuyos lados son paralelos, y tienen sentidos opuestos: digo que estos ángulos son iguales.

En efecto, prolonguemos los lados del ángulo *GEH* en sentido contrario al suyo, y resultará el ángulo *DEF* igual al ángulo *HEG* por ser opuestos por el vértice, é igual al *BAC* por tener sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido; luego los ángulos *A* y *GEH* son iguales.

3.° Sean los dos ángulos *BAC* y *FEG*, cuyos lados son paralelos, y los dos *AC* y *EF* tienen el mismo sentido, y los otros dos *AB* y *EG* sentido contrario: digo que estos ángulos son suplementarios.

Prolonguemos el lado *GE* en sentido contrario al suyo; y resultará el ángulo *DEF* suplemento del *FEG* é igual al ángulo *A*; luego el ángulo *FEG* y el ángulo *A* son suplementarios.

TEOREMA 12 (*fig.* 18).

Dos ángulos BAC *y* EDG, *cuyos lados son respectivamente perpendiculares, son iguales ó suplementarios.*

Por el punto *A* levanto las dos perpendiculares *AK* y *AF* á los lados *AC* y *AB*; el ángulo *FAK* será igual al *BAC*, por tener ambos el mismo complemento *KAB*; pero el ángulo *FAK* tiene sus lados paralelos á los del ángulo *EDG*, puesto que *FA* y *ED* son perpendiculares á la *AB*, y *AK* y *GD* lo son á la *AC*; luego dicho ángulo *FAK* es igual al *EDG*, ó es suplemento del *EDG*: luego tambien el ángulo *BAC* es igual al *EDG*, ó el suplemento del *EDG*.

NOTA. Si los dos ángulos *BAC* y *EDG* son agudos ú obtusos, lo que se conocerá fácilmente por la figura á que correspondan, dichos ángulos serán iguales; y si uno es agudo y otro obtuso, serán suplementarios.

LIBRO SEGUNDO.

POLÍGONOS.

Nociones preliminares.

18. Se llama *polígono* la porcion de plano terminada por líneas rectas: estas rectas se llaman *lados* del polígono.

Contorno de un polígono es el conjunto de sus lados. *Perímetro* de un polígono es el valor numérico de su contorno.

Se llama *triángulo* el polígono que tiene tres lados; *cuadrilátero* el polígono que tiene cuatro lados; *pentágono* el que tiene cinco; *exágono* el que tiene seis; *eptágono* el que tiene siete; *octógono* el que tiene ocho; *eneágono* el que tiene nueve; *decágono* el que tiene diez; *endecágono* el que tiene once; *dodecágono* el que tiene doce; *pentedecágono* el que tiene quince (*a*).

Se llama polígono *convexo* el polígono cuyo contorno no puede ser cortado por una recta mas que en dos puntos, ó lo que es igual, el polígono cuyos ángulos tienen todos la abertura hácia el interior del mismo: tal es el polígono *ABCDE* (*fig.* 19, *sin la* AC).

El polígono no es convexo, si su contorno puede ser cortado por una recta en mas que dos puntos; ó bien, si alguno de sus ángulos tiene la abertura hácia la parte esterior del mismo: tal es el polígono *ABCDEF* (*fig.* 20).

En un polígono se llaman ángulos *adyacentes* á uno cualquiera de sus lados los dos ángulos que tienen comun este lado; y al contrario, todo lado de un polígono se llama lado *adyacente* á los ángulos á que pertenece.

Se llama *diagonal* de un polígono toda recta que une los vértices de dos ángulos que no son adyacentes á un mismo lado. Asi, la recta *AC* (*fig.* 19) es una diagonal.

(*a*) Esta nomenclatura es inútil, y no deberian quedar mas nombres particulares de los polígonos que *triángulo*, y quizá *cuadrilátero*; pues no conviene poner nombres nuevos sino á las cosas que, ocurriendo á menudo, exigen muchas palabras para ser designadas.

CAPÍTULO I.

Triángulos.

TEOREMA 13 (*fig.* 21, *sin la* CD).

Un lado cualquiera AC *de un triángulo* ABC *es menor que la suma de los otros dos.*

Siendo AC línea recta, es $AC < AB + BC$.

Corolario. *Un lado cualquiera de un triángulo es mayor que la diferencia de los otros dos:* pues acabamos de demostrar que $AB + BC > AC$; luego, restando BC de ambos miembros, será $AB > AC - BC$; y restando AB de ambos miembros de la primera desigualdad, es $BC > AC - AB$.

TEOREMA 14 (*fig.* 22).

La suma de los tres ángulos de un triángulo ABC *es igual á dos ángulos rectos.*

Por el vértice de uno de los ángulos, C por ejemplo, tiro una paralela CD al lado opuesto, y tendré [*Recip. del* 9].

$$A + ACD = 2R \text{ (a)},$$

ó bien $$A + ACB + BCD = 2R:$$

los ángulos BCD y B son iguales, por ser alternos entre paralelas; luego $A + ACB + B = 2R$.

Corolarios. 1.° *El ángulo esterno* BCD (fig. 21), *formado por un lado* BC *de un triángulo y la prolongacion* CD *de otro lado, es igual á la suma de los dos ángulos* A *y* B *no adyacentes á él:* pues el ángulo BCD por una parte y la suma de los ángulos A y B por otra tienen el mismo suplemento ACB.

2.° *Un triángulo no puede tener dos ángulos rectos, ni dos obtusos, ni uno recto y otro obtuso:* pues, si alguno de estos casos fuese posible, la suma de los tres ángulos del triángulo seria mayor que dos rectos.

3.° *Si dos ángulos de un triángulo son iguales á dos de otro, el tercer ángulo del primer triángulo será igual al tercer ángulo del segundo triángulo:* pues estos terceros ángulos son suplementos de sumas iguales.

Se llama triángulo *equilátero* el triángulo que tiene sus tres lados iguales; triángulo *isósceles* el que tiene dos lados iguales; y triángulo *escaleno* el que tiene sus tres lados desiguales.

Se llama triángulo *rectángulo* el triángulo que tiene un ángulo recto; triángulo *obtusángulo* el que tiene un ángulo obtuso; y triángulo *acutángulo* el que tiene sus tres ángulos agudos.

(*a*) En adelante representaremos por R el ángulo recto.

Los triángulos acutángulos y obtusángulos se comprenden en la denominacion comun de triángulos *oblicuángulos*.

En un triángulo rectángulo se llama *hipotenusa* el lado opuesto al ángulo recto, y los lados del ángulo recto se llaman *catetos*.

Altura de un triángulo es la perpendicnlar bajada desde el vértice de uno de sus ángulos al lado opuesto, que entonces toma el nombre de *base*, ó á su prolongacion.

Vértice de un triángulo es el vértice del ángulo opuesto á la base.

En el triángulo isósceles se llama *base* el lado desigual á los otros.

4.° *En el triángulo rectángulo los dos ángulos agudos son complementarios;* pues entre los dos valen un ángulo recto.

TEOREMA 15 (*fig.* 23).

Dos triángulos ABC, DEF *son iguales, cuando tienen dos lados respectivamente iguales,* AB = DE, AC = DF, *é igual el ángulo comprendido,* A = D.

Coloco el triángulo *DEF* sobre el *ABC*, de modo que el lado *DF* coincida con su igual *AC*, y que el punto *E* caiga hácia el mismo lado de la recta *AC* que el punto *B*. El lado *DE* caerá sobre el *AB*, por ser iguales los ángulos *A* y *D* por suposicion; el punto *E* caerá sobre el *B*, por ser iguales los lados *DE* y *AB* por suposicion; luego los lados *EF* y *BC*, que tienen unos mismos estremos, coincidirán; y por tanto los triángulos son iguales.

Nota. Obsérvese que cuando dos triángulos son iguales, los ángulos iguales en ambos triángulos están opuestos á lados iguales, y al contrario.

TEOREMA 16 (*fig.* 23).

Dos triángulos ABC, DEF *son iguales, cuando tienen un lado igual,* AC = DF, *adyacente á dos ángulos respectivamente iguales,* A = D, C = F.

Coloco el triángulo *DEF* sobre el *ABC*, de modo que el lado *DF* coincida con su igual *AC*, y que el punto *E* caiga hácia el mismo lado de *AC* que el punto *B*. Por ser iguales los ángulos *A* y *D*, el lado *DE* caerá sobre el lado *AB*; y por ser iguales los ángulos *C* y *F*, el lado *FE* caerá sobre el lado *CB*: luego el punto *E* caerá sobre el punto *B*, y por consiguiente los triángulos son iguales.

TAOREMA 17 (*fig.* 24).

Si dos triángulos ABC, DEF *tienen dos lados respectivamente iguales,* AB = DE, AC = DF, *y el ángulo* BAC *comprendido por los dos lados del primero es mayor que el ángulo* D *comprendido* *por los dos lados del segundo, el tercer lado* BC *del primer triángulo será mayor que el tercer lado* EF *del segundo.*

Coloco el triángulo DEF en ACG, es decir, de modo que el lado DF coincida con su igual AC, y que los dos triángulos queden hácia un mismo lado de la recta AC. Siendo el ángulo BAC mayor que el D, el lado DE caerá dentro del ángulo BAC. Tiremos la bisectriz (*a*) AH del ángulo BAG, y la recta HG: los dos triángulos BAH y GAH, que tienen el lado AH comun, el lado $AB = AG$ por hipótesi, y el ángulo $BAH = GAH$ por construccion, son iguales; luego $BH = GH$. Mas en el triángulo GHC es $GH + HC > GC$; luego $BH + HC > GC$, ó bien $BC > EF$.

Si el punto E cayese sobre la recta BC, es evidente que seria entonces $BC > EF$.

Recíproco del 15 (*b*). *Dos triángulos* ABC, DEF (*fig.* 23) *son iguales, cuando tienen sus tres lados respectivamente iguales,* AB = DE, AC = DF, BC = EF.

En efecto, el ángulo A es igual al ángulo D; pues de otro modo, segun el teorema anterior, el lado BC no seria igual al lado EF. Por consiguiente los dos triángulos ABC y DEF, que tienen dos lados respectivamente iguales, é igual el ángulo comprendido, son iguales.

Recíproco del 17. *Si dos triángulos* ABC, DEF (*fig.* 24, sin las líneas auxiliares) *tienen dos lados respectivamente iguales,* AB = DE, AC = DF, *y el tercer lado* BC *del primero es mayor que el tercer lado* EF *del segundo, el ángulo* A *opuesto al tercer lado en el primer triángulo será mayor que el ángulo* D *opuesto al tercer lado en el segundo triángulo.*

El ángulo A no puede ser igual al D ni menor que el D; pues si fuese igual al D, los triángulos ABC, DEF serian iguales

---

(*a*) Se llama *bisectriz* de un ángulo la recta que divide al ángulo en dos partes iguales.

(*b*) Dijimos (*Aritm.* 166) que un teorema se llama *recíproco* de otro cuando la conclusion é hipótesi del uno forman la hipótesi y conclusion del otro. Esto es lo que dicen todos los autores que se ocupan de esta definicion: mas ahora añadimos nosotros, que constando á veces de varias partes la hipótesi y conclusion de un teorema, un segundo teorema se llama tambien *recíproco* del primero, cuando su hipótesi se compone de parte de la hipótesi y de parte, ó del todo, de la conclusion del primero, y su conclusion se compone del resto de la hipótesi y del resto de la conclusion del primero.

Si se examinan con cuidado los teoremas 6, 15 y 17, se verá que el recíproco del 6 tiene por hipótesi parte de la hipótesi y toda la conclusion del primero, y por conclusion el resto de la hipótesi del primero; que el recíproco del 15 tiene por hipótesi parte de la hipótesi y parte de la conclusion del primero, y por conclusion el resto de la hipótesi y el resto de la conclusion del primero; y que el recíproco del 17 se halla en el mismo caso que el recíproco del 15.

[*Teor.* 15], y por consiguiente seria $BC = EF$, contra la hipótesi. Si el ángulo A fuese menor que el D, seria el lado $BC < EF$ [*Teor.* 17], lo que tambien es contrario á la hipótesi. Luego el ángulo BAC es mayor que el ángulo D.

TEOREMA 18 (*fig.* 25).

Si desde un punto B *tomado en un lado de un ángulo agudo* BAC *se baja una perpendicular* BD *al otro lado, esta perpendicular caerá dentro del ángulo:* pues la perpendicular no puede coincidir con el lado BA, y si cayese fuera del ángulo como en BE, el triángulo BAE tendria el ángulo recto E y el obtuso BAE; lo que es imposible.

+TEOREMA 19 (*figs.* 26 *y* 27).

1.° *Si un triángulo tiene dos ángulos iguales, sus lados opuestos son iguales.*

2.° *Si un triángulo tiene dos ángulos desiguales, al mayor ángulo se opone mayor lado.*

1.° Sea el triángulo ABC (*fig.* 26) que tiene iguales los ángulos A y C: digo que los lados BC y AB, opuestos á dichos ángulos, son iguales.

Bajo desde el punto B la perpendicular BD al lado opuesto, la cual caerá dentro del triángulo, puesto que, siendo iguales los dos ángulos A y C, son necesariamente agudos. Los triángulos ABD y CBD tienen comun el lado BD, los ángulos en D iguales por ser rectos, y los ángulos en B iguales como complementos de los A y C, que son iguales por hipótesi; luego [*Teor.* 16] estos triángulos son iguales, y por consiguiente los lados AB y BC son iguales.

2.° Sea el triángulo ABC (*fig.* 27), en el cual el ángulo A es mayor que el C: digo que el lado BC es mayor que el AB.

Tiro por el punto A una recta AD que forme con la AC un ángulo $DAC = C$: los lados AD y DC del triángulo ACD serán iguales. En el triángulo ABD tenemos $AD + DB > AB$; luego $CD + DB > AB$, ó $CB > AB$.

Recíproco. 1.° *Si un triángulo* ABC (fig. 26, sin la *BD*) *tiene dos lados iguales* AB y CB, *los ángulos* C *y* A *opuestos á dichos lados son iguales.*

2.° *Si un triángulo* ABC (fig. 27, sin la *AD*) *tiene dos lados desiguales, al mayor lado se opone mayor ángulo.*

1.° Los ángulos A y C no pueden ser desiguales, porque en tal caso, segun el teorema anterior, tambien serian desiguales los lados BC y AB, siendo asi que son iguales.

2.° El ángulo A no puede ser igual al C ni menor que el C: pues si fuese igual al C, el lado BC seria igual al lado AB; lo que es contrario á la hipótesi. Si el ángulo A fuese menor que el C, seria el lado BC menor que el AB; lo que tambien es contrario á la hipótesi: luego $A > C$.

Corolario. *El triángulo equilátero tiene sus tres ángulos iguales;* pues lo son sus tres lados. Por consiguiente cada uno de sus ángulos valdrá $\frac{1}{3}$ de dos rectos, ó $\frac{2}{3}$ de un recto.

TEOREMA 20 (*fig.* 28).

La perpendicular BA *bajada á una recta* DE *desde un punto* B *tomado fuera de esta recta es menor que cualquiera oblicua* BC *tirada desde dicho punto á la recta.*

Siendo el triángulo ABC rectángulo en A, el ángulo ACB será agudo, y por tanto será menor que el recto BAC; luego $BA < BC$.

Recíproco. *La recta mas corta que se puede tirar desde un punto á otra recta, es perpendicular á esta:* pues si no lo fuese, se podria bajar desde dicho punto una perpendicular á la recta, y esta perpendicular seria la mas corta, contra lo supuesto.

19. Se llama *distancia* de un punto á una recta la perpendicular bajada desde dicho punto á la recta.

TEOREMA 21 (*fig.* 29).

Si desde un punto tomado fuera de una recta se tiran á esta recta una perpendicular y varias oblícuas: 1.° *Las oblícuas, que se apartan igualmente de la perpendicular, son iguales.* 2.° *De dos oblícuas, la que se parta mas de la perpendicular, es mayor.*

1.° Sean las oblícuas BC y BD, y sea $AC = AD$: digo que $BC = BD$.

Los triángulos rectángulos BAD y BAC son iguales, porque tienen dos lados respectivamente iguales é igual el ángulo comprendido; luego $BD = BC$.

2.° Sean las dos oblícuas BD y BE, y sea $AE > AD$; digo que $BE > BD$.

Tomo $AC = AD$, y tiro la BC, que será igual á la BD, porque dichas rectas BD y BC son oblícuas que se apartan igualmente de la perpendicular. Los ángulos BCA y BEA son agudos, por ser recto el ángulo BAE [*Teor.* 14, *Corol.* 2.°]; luego el ángulo BCE será obtuso, y por consiguiente mayor que el BEC: luego $BE > BC$, ó $BE > BD$.

Corolario. *Desde un punto tomado fuera de una recta no se pueden tirar á la recta mas que dos oblícuas iguales:* pues otra oblícua que se tirase, se apartaria de la perpendicular mas ó menos que las primeras, y por consiguiente seria mayor ó menor.

Recíproco. 1.° *Las oblícuas iguales se apartan igualmente de la perpendicular.*

2.° *La mayor de dos oblícuas se aparta de la perpendicular mas que la menor.*

1.° Sean las dos oblícuas iguales *BD* y *BC*: digo que $AD = AC$.

En efecto, *AD* y *AC* no pueden ser desiguales, porque si esto fuera posible, tambien serian desiguales, segun el teorema 2.°, las rectas *BD* y *BC*, siendo asi que son iguales.

2.° Sea la oblícua *BE* mayor que la *BD*: digo que la distancia *EA* será mayor que la *AD*.

La distancia *EA* no puede ser igual á la *AD*, ni menor que la *AD*; pues si la distancia *EA* fuese igual á la *AD*, seria $BE = BD$, lo que es contrario á la hipótesi; y si la distancia *EA* fuese menor que la *AD*, seria $BE < BD$, lo que tambien es contrario á la hipótesi. Luego $AE > AD$.

20. Nota. Generalizando el método de demostracion empleado en este recíproco, seguido tambien en los recíprocos de los teoremas 15, 17 y 19, podremos establecer el siguiente principio.

Cuando en uno ó varios teoremas se hayan hecho todas las hipótesis posibles sobre un mismo sugeto, y las conclusiones respectivas sean todas diferentes, los recíprocos de dichos teoremas serán ciertos.

En adelante advertiremos cuándo uno ó mas recíprocos se hallan en este caso, y esto solo bastará para estar seguros de su certeza; pero el lector podrá repetir el sencillo y natural razonamiento que acabamos de emplear en el recíproco del teorema 21, y que hemos empleado tambien en la demostracion de los recíprocos de los teoremas 15, 17 y 19.

TEOREMA 22 (*fig.* 30).

Dos triángulos rectángulos ABC, DEF *son iguales, cuando tienen las hipotenusas iguales, y un cateto* AB *del uno igual á un cateto* DE *del otro.*

Coloco el triángulo *DEF* de modo que su ángulo recto *D* coincida con el recto *A*: el punto *E* caerá entonces sobre el *B*, por ser iguales por hipótesi los dos catetos *AB* y *DE*; tambien el punto *F* caerá sobre *C*, por ser iguales las hipotenusas *BC* y *EF* [*Teor.* 21, *Recip.* 1.°]; luego los dos triángulos *ABC* y *DEF*, cuyos tres vértices coinciden, son iguales.

21. Notas. 1.ª Además de los cuatro casos de igualdad de triángulos [*Teoremas* 15, 16, *Recip. del* 15, y 22], hay otros varios; pero todos estos otros son supérfluos.

2.ª Ocurre á menudo tener que demostrar que dos rectas son iguales, ó que dos ángulos son iguales; y esto se conseguirá en adelante, haciendo la construccion conveniente para que dichas dos rectas ó dichos dos ángulos correspondan á dos triángulos iguales.

TEOREMA 23 (*fig.* 31).

1.° *Todo punto* D (fig. 31, sin las líneas *DE* y *EB*), *que está en la perpendicular* CD *levantada á una recta* AB *en su punto medio* C, *equidista de los estremos* A y B *de dicha recta.*

2.° *Todo punto* E (fig. 31), *que está fuera de la perpendi*[illegible]*lar* CD *levantada á una recta* AB *en su punto medio* C, *n*[illegible] *dista de los estremos de la recta.*

1.° Las rectas *DA* y *DB* son iguales, por ser oblí[illegible] apartan igualmente de la perpendicular *CD*, ó porque lo[illegible] los *ADC* y *BDC* son iguales.

2.° Tiro la *BD*, y tengo en el triángulo *BDE*, $BD + DE$ [illegible] E; pero $BD = AD$; luego $AD + DE > BE$, ó $AE > BE$.

Recíproco. 1.° *Todo punto, que equidista de los estremos de una recta, está en la perpendicular levantada á dicha recta en su punto medio.*

2.° *Todo punto, que no equidista de los estremos de una recta, está fuera de la perpendicular levantada á dicha recta en su punto medio* [20].

TEOREMA 24 (*fig.* 32).

Si una recta CD *tiene dos puntos* C *y* D, *cada uno de los cuales equidista de los estremos* A *y* B *de otra recta* AB, *es perpendicular á esta, y la divide en dos partes iguales.*

Si en el punto medio de la *AB* levantamos una perpendicular á esta recta, esta perpendicular pasará por los puntos *C* y *D*, por hallarse cada uno de estos puntos á igual distancia de los puntos *A* y *B*; luego dicha perpendicular y la recta *CD*, que tienen dos puntos comunes, serán una misma recta; y por tanto la *CD* es perpendicular á la *AB*, y la divide en dos partes iguales (*a*).

TEOREMA 25 (*fig.* 33).

1.° *Todo punto* E *que está en la bisectriz* CD *de un ángulo* ACB, *equidista de los lados* AC *y* BC *de dicho ángulo.*

2.° *Todo punto* H *interior á un ángulo* ACB, *y que está fuera de la bisectriz* CD *del ángulo, no equidista de los lados* AC *y* BC *de dicho ángulo.*

1.° Las perpendiculares *EF* y *EG* (*fig.* 1) son iguales, porque los triángulos *ECF* y *ECG* tienen comun el lado *CE*, los án-

(*a*) Es fácil demostrar este teorema, sin fundarse en el anterior, guiándose por la nota 2.ª núm. 21, es decir, fundándose solamente en la igualdad de los triángulos.

gulos en C iguales por suposicion, y los ángulos en E iguales, por ser complementos de los iguales en C: luego [*Teor.* 16] estos triángulos son iguales; luego $EF = EG$.

2.° Siendo el ángulo BCD agudo, por ser mitad del ángulo ACB, el ángulo HCB será agudo con mayor razon; luego [*Teor.* 18] la perpendicular HI caerá dentro de dicho ángulo HCB, ó lo que es igual, el pié I de dicha perpendicular caerá sobre el lado CB. Mas el ángulo HCA puede ser agudo, recto ú obtuso, y por tanto el pié F de la perpendicular HF podrá caer sobre el lado AC, ó en el punto C, ó en la prolongacion del lado AC.

Si el pié de la perpendicular HF cae sobre el lado AC; tirando la EG perpendicular á la CB, y juntando los puntos H y G, tendremos [1.°] $EF = EG$; pero $EG + EH > HG$; luego

$$EF + EH > HG, \text{ ó } HF > HG;$$

y como $HG > HI$, será con mayor razon $HF > HI$.

Si el pié de la perpendicular HF cae en C (*fig.* 2), será evidentemente $GH > HI$.

Si el pié F cae en la prolongacion del lado AC (*fig.* 3), tenemos $HI < HG$; luego con mayor razon $HI < HF$.

Recíproco. 1.° *Todo punto interior á un ángulo, que equidista de los lados del ángulo, está en la bisectriz de dicho ángulo.*

2.° *Todo punto interior á un ángulo, que no equidista de los lados del ángulo, está fuera de la bisectriz de dicho ángulo* [20].

CAPÍTULO II.

Polígonos en general.

TEOREMA 26.

La suma de todos los ángulos de un polígono convexo es igual á tantas veces dos ángulos rectos como lados tiene el polígono menos dos.

Tiremos desde uno de los vértices diagonales á todos los demas, las cuales dividirán al polígono en triángulos: cada uno de los dos triángulos estremos tendrá dos lados del polígono, y cada triángulo interior tendrá un solo lado del polígono; luego dichas diagonales dividen al polígono en tantos triángulos como lados tiene menos dos. La suma de los ángulos de todos los triángulos es igual á la suma de los ángulos del polígono; y como la suma de los tres ángulos de un triángulo es igual á dos rectos, la suma de todos los ángulos del polígono será igual á tantas veces dos rectos como triángulos hay, es decir, como lados tiene el polígono menos dos.

NOTA. Si n es el número de lados, y por consiguiente tambien el número de ángulos del polígono, la suma de todos sus ángulos será $2R(n-2) = 2Rn - 4R$.

Corolario. *La suma de los cuatro ángulos de un cuadrilátero es igual á cuatro ángulos rectos.*

TEOREMA 27 (*fig.* 34).

La suma de todos los ángulos esteriores, que resultan prolongando en un mismo sentido todos los lados de un polígono convexo, es igual á cuatro ángulos rectos.

En efecto, cada uno de los ángulos esteriores y su adyacente interior suman 2 rectos; luego la suma de todos los ángulos interiores y esteriores valdrá tantas veces 2 rectos como lados tiene el polígono; suma que, segun el teorema anterior, escede en dos veces 2 rectos á la de los ángulos interiores; luego la suma de los ángulos esteriores es igual á dos veces 2 rectos ó á 4 rectos.

NOTA. Haciendo uso del lenguaje algébrico, se demostrará este teorema como sigue:

Siendo n el número de ángulos, $2Rn$ será la suma de los ángulos interiores y esteriores; restando de esta suma la de los ángulos interiores, que es $2Rn - 4R$, resultará la suma de los ángulos esteriores $2Rn - (2Rn - 4R) = 2Rn - 2Rn + 4R = 4R$.

23. Se llama *paralelógramo* el cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos.

TEOREMA 28 (*fig.* 35).

Los lados opuestos de un paralelógramo son iguales.

Sea el paralelógramo $ABCD$: digo que los lados opuestos AB y CD son iguales, como tambien los lados opuestos AD y BC.

Tiro la diagonal BD: los dos triángulos ABD y BDC tienen comun el lado BD, los ángulos ABD y BDC iguales, por ser alternos entre paralelas, y los ángulos ADB y CBD iguales por la misma razon; luego dichos triángulos son iguales; luego $AB = DC$ y $AD = BC$.

Altura del paralelógramo es la perpendicular bajada desde un punto de uno de sus lados al lado opuesto, el cual entonces toma el nombre de *base*.

TEOREMA 29 (*fig.* 35).

Si los lados opuestos de un cuadrilátero ABCD *son iguales dos á dos,* AB = CD, AD = BC, *serán tambien paralelos dos á dos.*

Tiro la diagonal BD: los dos triángulos ABD y CBD tienen sus tres lados iguales respectivamente; luego dichos triángulos son iguales, y por tanto el ángulo $ABD = BDC$: luego [*Teor.* 7] AB y DC son paralelas. Tambien el ángulo $ADB = CBD$; luego BC y AD son paralelas.

TEOREMA 30 (*fig.* 35).

Si dos lados opuestos AB *y* CD *de un cuadrilátero* ABCD *son iguales y paralelos, los otros dos lados* AD *y* BC *son tambien iguales y paralelos.*

Tiro la diagonal BD: los dos triángulos ABD y DBC tienen comun el lado BD, el lado $AB = DC$ por hipótesi, y el ángulo $ABD = BDC$ por ser alternos entre paralelas; luego estos triángulos son iguales; y por tanto $AD = BC$: además el ángulo $ADB = DBC$; luego AD y BC son paralelas.

TEOREMA 31 (*fig.* 36).

Las diagonales AC y BD *de un paralelógramo se cortan mútuamente en dos partes iguales.*

Los triángulos ABO y CDO, que tienen los lados AB y CD iguales, los ángulos ABO y CDO iguales, por ser alternos entre paralelas, y los ángulos BAO y DCO iguales por la misma razon, son iguales; luego $AO = CO$ y $BO = DO$.

TEOREMA 32 (*fig.* 37).

Dos paralelógramos ABCD, EFGH, *que tienen dos lados respectivamente iguales*, AB = EF, AD = EH, *é igual el ángulo comprendido*, A = E, *son iguales.*

Coloco al paralelógramo $EFGH$ sobre el $ABCD$, de manera que los dos ángulos iguales A y E coincidan: el punto F caerá entonces sobre el punto B, por ser $EF = AB$ por hipótesi; el punto H caerá sobre el D, por ser $EH = AD$ por hipótesi; la recta HG caerá sobre la DC, porque los ángulos H y D son iguales, como suplementos de los iguales A y E [*Teor.* 9, *Recip.*]. Por la misma razon la recta FG caerá sobre la BC, y por tanto el punto G caerá sobre el punto C; luego los dos paralelógramos coinciden ó son iguales.

24. Se llama paralelógramo *rectángulo*, ó simplemente *rectángulo*, el paralelógramo $ABCD$ (*fig.* 38) cuyos ángulos son rectos.

Si se considera como base uno de los lados del rectángulo, la altura es el lado adyacente.

Cuadrado es un rectángulo $ABCD$ (*fig.* 39) cuyos cuatro lados son iguales.

TEOREMA 33 (*fig.* 38).

Las diagonales AC *y* BD *de un rectángulo son iguales.*

Los triángulos rectángulos ABD y ACD son iguales, por ser el lado AD comun á los dos, y tener iguales los lados AB y CD; luego $AC = BD$.

Se llama *rombo* un paralelógramo $ABCD$ (*fig.* 40, *sin las diagonales*) cuyos cuatro lados son iguales, y cuyos ángulos no son rectos.

TEOREMA 34 (*fig.* 40).

Las diagonales AC *y* BD *de un rombo son perpendiculares entre sí:* pues el punto A equidista de B y D, y el punto C equidista tambien de B y D; luego [*Teor.* 24] la AC es perpendicular á la BD.

25. Se llama *trapecio* en cuadrilátero $ABCD$ (*fig.* 41, *sin las lineas* GH *y* EF) que tiene dos lados paralelos, y los otros dos no.

Los dos lados paralelos de un trapecio se llaman *bases* del trapecio.

Altura del trapecio es la perpendicular bajada desde un punto de una base á la otra.

TEOREMA 35 (*fig.* 41).

La recta EF *que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio, es:* 1.° *paralela á las bases* BC *y* AD; 2.° *igual á su semi-suma.*

1.° Tiro por el punto F la HG paralela al lado BA, y prolongo la base BC hasta que encuentre en G á la HG: los triángulos CFG y HFD son iguales [*Teor.* 16]; luego $GF = HF$; luego GF es mitad de GH, ó de su igual AB; y por tanto $GF = BE$. Luego el cuadrilátero $BGFE$ tiene iguales y paralelos los lados EB y FG; luego [*Teor.* 31] la recta EF es paralela á la BG, y por consiguiente á la AD.

2.° Siendo iguales los triángulos CGF y DFH, tendremos $CG = DH$. Ahora, $EF = BG = BC + CG$,

y $EF = AH = AD - DH$;

luego $2EF = BC + AD$,

y por consiguiente

$$EF = \frac{BC + AD}{2}.$$

LIBRO TERCERO.

CÍRCULO.

CAPÍTULO I.

Lineas rectas en el circulo.

TEOREMA 36.

Una *recta no puede cortar á una circunferencia mas que en dos puntos;* pues si la cortase en mas, tirando radios á dichos puntos, se tendrian tiradas desde el centro á la recta mas que dos rectas iguales; lo que es imposible [*Teor.* 21, *Corol.*].

TEOREMA 37 (*fig.* 42).

El diámetro AB *es mayor que cualquiera otra cuerda* DE.

Tiro los radios *CD* y *CE* á los estremos de la cuerda *DE*, y tendré en el triángulo *DCE*, $DC+CE>DE$; y como $DC+CE=AB$, será $AB>DE$.

TEOREMA 38 (*fig.* 42, *sin el triángulo*).

Todo diámetro AB *divide á la circunferencia y al circulo en dos partes iguales.*

Doblando el círculo por el diámetro *AB*, el arco *ADB* deberá coincidir con el *AEB*; pues si algun punto del arco *ADB* cayese fuera del arco *AEB*, no serian iguales todos los radios de este círculo.

TEOREMA 39 (*fig.* 43).

Tres puntos A, B *y* C, *que no están en linea recta, determinan la posicion de una circunferencia;* ó lo que es igual, *por tres puntos que no están en linea recta, puede pasar una circunferencia, y no puede pasar mas que una.*

Juntemos por medio de las rectas *AB* y *BC* los tres puntos *A*, *B* y *C*, y en los puntos medios de estas dos rectas levantemos las perpendiculares *DE* y *FG* á las mismas: estas perpendiculares se encontrarán; pues si fuesen paralelas, siéndo la *AB* perpendicular á la *DE*, tambien seria perpendicular á la *FG*; pero la *BC* es perpendicular á la *FG*; luego por un punto *B* se podrian tirar dos perpendiculares *BA* y *BC* á una recta *FG*, lo que es imposible. Ahora, el punto *O* de encuentro de las dos perpendiculares equidista de los estremos *A* y *B* de la recta *AB* [*Teor*. 23, 1.º], é igualmente el punto *O* equidista de los estremos *B* y *C* de la recta *BC*; luego el punto *O* equidista de los tres puntos *A*, *B* y *C*: haciendo pues centro en *O*, y describiendo con el radio *OA* una circunferencia, pasará esta por los tres puntos *A*, *B* y *C*. Luego por tres puntos que no están en línea recta, puede pasar una circunferencia.

Demostremos ahora que por tres puntos que no están en línea recta, no puede pasar mas que una sola circunferencia.

Imaginemos que por los tres puntos *A*, *B* y *C* pase otra circunferencia diferente de la primera: las rectas *AB* y *BC* serán dos de sus cuerdas, y su centro, que debe equidistar de los puntos *A*, *B* y *C*, se hallará á un mismo tiempo en las dos perpendiculares *DE* y *FG* levantadas á las rectas *AB* y *BC* en sus puntos medios [*Teor*. 23, *Recip*. 1.º]: luego su centro será el punto *O*, el mismo que el de la primera circunferencia. Como además la *OA* es un radio de la segunda circunferencia, esta segunda circunferencia y la primera tienen el mismo centro y el mismo radio, y por tanto coinciden. Luego por tres puntos que no están en línea recta, no puede pasar mas que una sola circunferencia.

Nota. *Si los tres puntos dados estuviesen en línea recta, la circunferencia no podria pasar por ellos;* pues está demostrado [*Teor*. 36], que una recta y una circunferencia no pueden tener tres puntos comunes.

Corolario. *Dos circunferencias no pueden cortarse mas que en dos puntos:* pues si tuviesen tres puntos comunes, coincidirian, segun acabamos de demostrar.

26. Una cuerda *AB* (*fig*. 44, 1.ª *sin la EF*) de un círculo corresponde á los dos arcos *AMB* y *AGB*, los cuales componen toda la circunferencia. Pero cuanto digamos en adelante del arco que corresponde á una cuerda, ó que una cuerda *subtiende*, se referirá al menor de los dos arcos.

TEOREMA 40 (*figs*. 44 *y* 45).

En círculos iguales ó en un mismo círculo: 1.º *Si dos arcos son iguales, sus cuerdas son tambien iguales.* 2.º *Si dos arcos son desiguales, el mayor tiene mayor cuerda.*

1.º Sean los dos arcos iguales *AMB* y *CND* (*fig*. 44) de dos círculos iguales: digo que sus cuerdas *AB* y *CD* son iguales.

Coloco el círculo *P* sobre su igual *O*, de modo que sus centros coincidan, y que el punto *C* caiga sobre el punto *A*: las dos circunferencias coincidirán, puesto que son iguales y tienen el mismo centro; y como los dos arcos *AMB* y *CND* son iguales por hipótesi, el punto *D* caerá sobre el punto *B*; luego las cuerdas *AB* y *CD*, cuyos estremos son los mismos, son iguales.

Si los arcos iguales *AMB* y *EGF* son de un mismo círculo, acabamos de ver que $CD = AB$, y por la misma razon $CD = EF$; luego $AB = EF$.

2.° Sean los dos arcos desiguales *AMB* y *CND* (*fig.* 45), siendo este el mayor de los dos: digo que la cuerda *CD* es mayor que la *AB*.

Tomo desde el estremo *A* del arco menor un arco *AME* igual al mayor *CND*, tiro la cuerda *AE* y los radios *OA*, *OB* y *OE*: las cuerdas *AE* y *CD* son iguales, segun acabamos de demostrar. Ahora, los triángulos *AOE* y *AOB* tienen comun el lado *OA*, el lado *OE* igual al *OB*, y el ángulo *AOE* mayor que el *AOB*; luego [*Recip. del teor.* 17] el tercer lado *AE* es mayor que el tercer lado *AB*, ó bien la cuerda *CD* es mayor que la cuerda *AB*.

Recíproco. En un mismo círculo ó en círculos iguales:

1.° *Cuerdas iguales subtienden á arcos iguales.*

2.° *La mayor cuerda subtiende á mayor arco* [20].

Nota. Aunque los arcos crecen creciendo las cuerdas, no se verifica que los arcos sean proporcionales á las cuerdas; pues si se toma un arco duplo de otro, se verá que su cuerda es menor que el duplo de la cuerda del primero.

27. Se llama *tangente* á una cicunferencia una recta indefinida que solo tiene un punto comun con la circunferencia. Este punto se llama *punto de contacto.*

La existencia de esta recta se demuestra por la proposicion siguiente.

TEOREMA 41 (*fig.* 46).

La perpendicular AB *al radio en el punto en que este corta á la circunferencia, es tangente á esta circunferencia.*

Siendo la *OC* perpendicular á la *AB*, es menor que cualquiera otra recta *OA* tirada desde el centro á la *AB*; luego el punto *A* está fuera del círculo: y como lo que acabamos de demostrar del punto *A*, se aplica á cualquier otro punto de la *AB*, escepto al punto *C*, se infiere que la recta *AB* es tangente á la circunferencia.

Recíproco. *La tangente* AB *á una circunferencia en un punto* C *es perpendicular al radio* OC *tirado al punto de contacto.*

Siendo la *AB* tangente, tendrá todos sus puntos fuera del círculo, escepto el punto *C*: luego el radio *OC* es la recta mas corta que se puede tirar desde el centro á la tangente; luego [*Teor.* 20, *Recip.*] el radio *OC* es perpendicular á la tangente.

Corolario. *Por un punto* C *de una circunferencia no se puede tirar mas que una tangente á dicha circunferencia*: puesto que la tangente es perpendicular al radio, y que por un punto de una recta no se la puede levantar mas que una sola perpendicular.

TEOREMA 42 (*fig.* 47).

El diámetro FD *perpendicular á una cuerda* AB *divide á esta cuerda y á cada uno de los dos arcos, que ella subtiende, en dos partes iguales.*

Tiro los radios *CA* y *CB*, los cuales son dos oblícuas iguales con respecto á la cuerda *AB*, y equidistan por lo tanto de la perpendicular *CE*, es decir, que $AE = BE$.

Siendo la *DF* perpendicular á la *AB* en su punto medio *E*, serán iguales las cuerdas *AD* y *BD*, como tambien las *AF* y *BF*; luego los arcos *AD* y *DB* serán iguales, y tambien los arcos *AF* y *BF* (*a*).

Nota. *La perpendicular levantada á una cuerda en su punto medio pasa por el centro*: pues el centro equidista de los estremos de la cuerda, y queda demostrado que todo punto que equidista de los estremos de una recta, está en la perpendicular levantada á dicha recta en su punto medio.

TEOREMA 43 (*fig.* 48).

Los arcos de una misma circunferencia comprendidos entre paralelas son iguales.

1.er *caso.* Sean *AB* y *CD* dos cuerdas paralelas; tirando el diámetro *EK* perpendicular á una de estas cuerdas, á la *AB* por ejemplo, será tambien perpendicular á su paralela *CD*; luego, segun el teorema último, serán iguales los arcos *AE* y *BE*, como tambien los *CE* y *DE*, y por tanto sus diferencias *AC* y *BD* serán iguales.

2.º *caso.* Sean paralelas la tangente *FG* y la cuerda *CD*: tirando el diámetro *EK* al punto *E* de contacto, será perpendicular á la tangente y á su paralela la cuerda *CD*; luego los arcos *CE* y *DE* son iguales.

3.er *caso.* Sean paralelas las dos tangentes *FG* y *HI*: tirando una cuerda *CD* paralela á una de las tangentes, y por consiguiente paralela tambien á la otra, serán iguales, segun acabamos de demostrar, los arcos *CE* y *DE*, *CK* y *DK*; luego las sumas *ECK* y *EDK* son iguales.

(*a*) Este teorema pudiera demostrarse siguiendo el método que indica la nota 2.ª núm. 21, pág. 17.

TEOREMA 44 (*fig.* 49).

En un mismo círculo ó en círculos iguales:

1.° *Dos cuerdas iguales* AB *y* CD *equidistan del centro.*

2.° *Si dos cuerdas* AG *y* CD *son desiguales, la mayor dista menos del centro.*

1.° Tirando los radios *AO* y *CO*, los triángulos rectángulos *OAE* y *OCF*, que tienen iguales las hipotenusas *OA* y *OC*, é iguales tambien los catetos *AE* y *CF*, por ser mitades de cuerdas iguales, son iguales; luego $OE = OF$.

2.° Siendo la cuerda *CD* menor que la cuerda *AG*, el arco *CD* es tambien menor que el arco *ABG*: tomo pues sobre este arco el *AB* igual al *CD*, y tiro la cuerda *AB*, la cual es igual á la *CD*, y por consiguiente dista del centro lo mismo que esta. Ahora bien, la *OK* es oblícua á la *AG*, y por consiguiente $OR < OK$; luego con mayor razon $OR < OE$, ó bien $OR < OF$.

Recíproco. En un mismo círculo ó en círculos iguales:

1.° *Dos cuerdas equidistantes del centro son iguales,*

2.° *La cuerda que dista menos del centro, es mayor que la que dista mas* [20].

CAPÍTULO III.

Interseccion y contacto de dos circunferencias.

TEOREMA 45 (*fig.* 50).

Si dos circunferencias (cuyos centros son los puntos C *y* c*) tienen un punto comun* A *fuera de la recta* Cc *que une sus centros, prolongada cuanto se quiera, tambien tendrán otro punto comun.*

Bajemos desde el punto *A* la perpendicular *AP* á la recta *Cc*, tomemos en su prolongacion una parte *PB* igual á la *AP*, y tiremos las rectas *CA* y *CB*, *cA* y *cB*. Las rectas *CA* y *CB* son iguales, por ser oblícuas que se apartan igualmente de la perpendicular *CP*; luego el punto *B* corresponde á la circunferencia cuyo centro es *C*. Tambien las *cA* y *cB* son iguales; luego el punto *B* corresponde á la circunferencia cuyo centro es *c*: luego el punto *B* es comun á las dos circunferencias.

Corolario. *Si dos circunferencias tienen un solo punto comun, este punto está en la recta que une los centros, prolongada suficientemente:* pues si dicho punto estuviese fuera, las dos circunferencias tendrian, segun el teorema, dos puntos comunes, contra la hipótesi.

TEOREMA 46.

1.° *Si dos circunferencias se cortan, la distancia de los centros es menor que la suma de los radios y mayor que su diferencia.*

2.° *Si dos circunferencias se tocan esteriormente, la distancia de los centros es igual á la suma de los radios.*

3.° *Si dos circunferencias se tocan interiormente, la distancia de los centros es igual á la diferencia de los radios.*

4.° *Si dos circunferencias son esteriores una á otra, la distancia de los centros es mayor que la suma de los radios.*

5.° *Si dos circunferencias son interiores una á otra, la distancia de los centros es menor que la diferencia de los radios.*

1.° Tiremos los radios CA y cA (*fig.* 51) á uno de los puntos de interseccion; resultará un triángulo ACc, en el cual sabemos que un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia, esto es, $Cc < CA + cA$, y $Cc > CA - cA$.

2.° Tocándose las circunferencias en el punto A (*fig.* 52), este punto está en la recta que une los centros; luego $Cc = CA + cA$.

3.° Tocándose la circunferencias en el punto A, este punto se halla en la prolongacion de la recta Cc (*fig.* 53) que une los centros; luego $Cc = CA - cA$.

4.° Es evidente (*fig.* 54) que

$$Cc = CA + AB + cB;$$

luego

$$Cc > CA + cB.$$

5.° Es evidente (*fig.* 55) que

$$Cc = CA - cB - AB;$$

luego

$$Cc < CA - cB.$$

Recíproco. 1.° *Si la distancia de los centros es menor que la suma de los radios y mayor que su diferencia, las circunferencias se cortan.*

2.° *Si la distancia de los centros es igual á la suma de los radios, las circunferencias se tocan esteriormente.*

3.° *Si la distancia de los centros es igual á la diferencia de los radios, las circunferencias se tocan interiormente.*

4.° *Si la distancia de los centros es mayor que la suma de los radios, las circunferencias son esteriores una á otra.*

5.° *Si la distancia de los centros es menor que la diferencia de los radios, las circunferencias son interiores una á otra* [20],

CAPÍTULO III.

Medida de los ángulos.

---

28. Llamaremos arco *correspondiente* á un ángulo al arco comprendido entre sus lados, descrito con un radio arbitrario desde el vértice como centro.

TEOREMA 47 (*fig.* 56).

1.° *Si dos ángulos* A *y* D *son iguales, sus arcos correspondientes* BC *y* EF *descritos con igual radio son iguales.*

2.° *Si dos ángulos* A *y* D *son desiguales, el mayor* A *tiene mayor arco correspondiente, estando los dos arcos descritos con igual radio.*

1.° Tiro las cuerdas *BC* y *EF*: los triángulos *ABC* y *DEF* son iguales, por tener dos lados respectivamente iguales, é igual el ángulo comprendido; luego las cuerdas *BC* y *EF* son iguales, y por consiguiente los arcos *BC* y *EF* son iguales.

2.° Los triángulos *ABC* y *DEF* tienen los lados *AB* y *AC* iguales á los *DE* y *DF*, y además el ángulo *A* es mayor que el *B*; luego [*Teor.* 17] la cuerda *BC* es mayor que la *EF*; y por tanto el arco *BC* es mayor que el arco *EF*.

Recíproco. 1.° *Si dos arcos de igual radio, correspondientes á dos ángulos, son iguales, los ángulos son iguales.*

2.° *Si dos arcos de igual radio, correspondientes á dos ángulos, son desiguales, el mayor corresponde á mayor ángulo* [20].

29. Se llama *cuadrante* la cuarta parte de la circunferencia.

TEOREMA 48 (*fig.* 57).

El arco BC *correspondiente á un ángulo recto* BAC *es un cuadrante.*

Prolongo el lado *AC* en sentido contrario al suyo, y haciendo centro en *A*, describo con un radio arbitrario *AB* una circunferencia: el arco *DBC* es media circunferencia; y como los ángulos *BAC* y *BAD* son rectos, y por tanto iguales, sus arcos correspondientes *BC* y *BD* son iguales; luego *BC* es la cuarta parte de la circunferencia.

30. Se llaman *conmensurables* dos cantidades de una misma naturaleza, cuando tienen nna *medida comun*, es decir, cuando existe otra cantidad de la misma naturaleza que está contenida en las dos un número exacto de veces; y se llaman *inconmensurables*, cuando no tienen medida comun.

La razon de dos cantidades conmensurables es de la de los números de veces que contienen á su medida comun: pues si las dos cantidades son A y B, a su medida comun, m y n los números de veces que está contenida en A y B, será $A = ma$, $B = na$; luego $\frac{A}{B} = \frac{ma}{na}$. Si la unidad, á que se refieren las cantidades A y B, no está determinada, se podrá tomár a por unidad, y entonces $\frac{A}{B} = \frac{ma}{na} = \frac{m}{n}$. Si la unidad á que se refieren A y B, está determinada, y es diferente de a, a tendrá un cierto valor numérico, el cual será un factor comun á los dos términos del quebrado $\frac{ma}{na}$; y por consiguiente se podrá suprimir dicho factor comun, y quedará $\frac{A}{B} = \frac{m}{n}$.

Segun esto, la razon de dos cantidades conmensurables es un número conmensurable; luego, siempre que la razon de dos cantidades de una misma naturaleza sea un número inconmensurable, dichas cantidades serán inconmensurables.

TEOREMA 49 (*figs.* 58 y 59).

La razon de dos ángulos BAC *y* EDF *es la misma que la de sus arcos correspondientes* BC *y* EF *descritos con el mismo radio.*

Pueden suceder dos casos: 1.° que los arcos BC y EF (*figura* 58) sean conmensurables; 2.° que sean inconmensurables.

1.^{er} *caso.* Sea CG la medida comun de los dos arcos; y supongamos que esté contenida en el arco BC 8 veces, y en el arco EF 5 veces: la razon de los arcos BC y EF será $\frac{8}{5}$. Tirando radios á los puntos de division de los arcos, el ángulo BAC quedará dividido en 8 ángulos parciales, y el ángulo EDF quedará dividido en 5 ángulos parciales: todos estos ángulos parciales son iguales, porque sus arcos correspondientes descritos con el mismo radio son iguales; luego cualquiera de estos ángulos parciales es la medida comun de los dos ángulos propuestos, y por tanto la razon de estos dos ángulos es $\frac{8}{5}$, la misma que la de los arcos BC y EF.

2.° *caso.* Si los arcos BC y EF (*fig.* 59) son inconmensurables, imaginemos dividido uno de ellos, por ejemplo el EF, en partes iguales tan pequeñas como queramos, y que se lleve una de estas partes sobre el arco CB desde el punto C: el último punto de division no podrá caer en B, por ser los arcos BC y EF inconmensurables. Sea R el último punto de division, y tiremos la recta AR. Siendo conmensurables los arcos RC y EF, tendremos segun el primer caso, $\frac{RAC}{EDF}=\frac{RC}{EF}$.

Ahora, como el punto R puede aproximarse al punto B tanto como se quiera, siendo suficientemente pequeñas las divisiones de EF, se infiere que BC es el límite de la cantidad variable RC: por consiguiente la cantidad constante $\frac{BAC}{EBF}$, es el límite de la cantidad variable $\frac{RAC}{EDF}$, y la cantidad constante $\frac{BC}{EF}$ es el límite de la cantidad variable $\frac{RC}{EF}$: luego, segun el teorema de los límites [*Compto. de la Aritm.* 16], tendremos $\frac{BAC}{EDF}=\frac{BC}{EF}$.

Nota. Si el ángulo EDF es la unidad para medir el ángulo BAC, la primera razon de la proporcion $\frac{BAC}{EDF}=\frac{BC}{EF}$ es la medida del ángulo BAC (*a*); luego la segunda razon $\frac{BC}{EF}$, igual á la anterior, es tambien la medida del ángulo BAC. Luego *la medida de un ángulo es la razon de su arco al del ángulo unidad.*

Este enunciado se simplificará, tomando por unidad de los arcos el arco EF correspondiente al ángulo EDF tomado por unidad de los ángulos, pues entonces la razon $\frac{BC}{EF}$ es la medida del arco, ó abreviadamente, es el arco; luego en tal caso, *la medida de un ángulo es la misma que la de su arco correspondiente*, *ó*, en términos mas breves, *es su arco correspondiente.*

Se toma ordinariamente por unidad de ángulos el ángulo recto; luego, para que la medida de un ángulo sea su arco, ó lo que es igual, para que el ángulo y su arco correspondiente tengan la misma medida ó el mismo valor numérico, se tomará por unidad de arcos el cuadrante, que, sabemos, es el arco correspondiente al ángulo recto.

Para valuar los ángulos con facilidad, se dividen el cuadrante y el ángulo recto en 90 partes iguales llamadas *grados*; cada grado se divide en 60 partes iguales llamadas *minutos*; cada minuto en 60 partes iguales llamadas *segundos*. Los grados, minutos y segundos se indican respectivamente con los signos $^{\circ}$, $'$, $''$. Asi, si un

---

(*a*) Se llama *medida* ó *valor numérico* de una cantidad la razon de dicha cantidad á otra de la misma naturaleza que se toma por unidad.

ángulo ó su arco correspondiente, que, sabemos ya, tienen la misma medida, es de 40 grados, 25 minutos y 30 segundos, se indicará 40° 25′ 30″.

31. Dos arcos cuya suma es un cuadrante, se llaman *complementarios* ó *complemento* uno de otro.

Dos arcos cuya suma es media circunferencia, se llaman *suplementarios* ó *suplemento* uno de otro.

32. Se llama ángulo *inscripto* el ángulo cuyo vértice está en la circunferencia, y cuyos lados son dos cuerdas.

TEOREMA 50 (*fig*. 60).

La medida del ángulo inscripto es la mitad del arco comprendido entre sus lados.

Pueden suceder tres casos: 1.° que el centro esté en uno de los lados del ángulo; 2.° que el centro se halle comprendido entre los lados del ángulo; 3.° que el centro se halle fuera de dichos lados.

1.° Sea el ángulo ABC (*fig*. 60, *sin las lineas* BE *y* BD); digo que su medida es la mitad del arco AC.

Para demostrarlo, tiro el radio AO, y tendremos que el ángulo AOC esterno al triángulo ABO es igual á la suma de los ángulos ABO y BAO; mas estos dos ángulos son iguales, porque sus lados opuestos AO y BO son iguales; luego el ángulo AOC es doble del ángulo ABO, ó lo que es igual, el ángulo ABO es mitad del ángulo AOC. La medida de este es el arco AC; luego la medida del ángulo ABC es la mitad del arco AC.

2.° Sea el ángulo ABD (*fig*. 60, *sin las lineas* AO *y* BE): tiro el diámetro BC. La medida del ángulo ABC es, segun acabamos de demostrar, $\frac{AC}{2}$, y la del ángulo DBC es $\frac{CD}{2}$; luego la del ángulo ABD, suma de los ángulos ABC y DBC, será

$$\frac{AC}{2}+\frac{CD}{2}=\frac{AC+CD}{2}=\frac{ACD}{2}.$$

3.° Sea el ángulo ABE (*fig*. 60, *sin las lineas* AO *y* BD): tiro el diámetro BC. La medida del ángulo EBC es $\frac{EC}{2}$, y la del ángulo ABC es $\frac{AC}{2}$; luego la del ángulo EBA, diferencia de los ángulos EBC y ABC, será $\frac{EC-AC}{2}$, ó $\frac{EA}{2}$.

Corolarios. 1.° *Todos los ángulos inscriptos* ABC, ADC, AEC, (fig. 61), *que comprenden entre sus lados el mismo arco* AC *son* *iguales;* pues cada uno de ellos tiene por medida la mitad del arco AC.

2.° *El ángulo inscripto* BAC (*fig.* 62), *cuyos lados comprenden media circunferencia, es recto:* pues su medida es la mitad de la media circunferencia, ó un cuadrante.

TEOREMA 51 (*fig.* 63).

La medida del ángulo cuyos lados son una tangente y una cuerda, es la mitad del arco comprendido entre sus lados.

Pueden suceder tres casos: 1.° que el centro esté en la cuerda; 2.° que el centro esté entre los lados del ángulo; 3.° que el centro esté fuera de los lados del ángulo.

1.° Sea el ángulo CBD (*fig.* 63, *sin las lineas* BA *y* BE) formado por la tangente CB y el diámetro BD: este ángulo es recto, y por tanto su medida es un cuadrante, que es la mitad del arco BAD.

2.° Sea el ángulo CBE (*fig.* 63, *sin la* AB): tiro el diámetro BD. La medida del ángulo CBD es $\frac{BAD}{2}$, la del ángulo inscripto EBD es $\frac{ED}{2}$; luego la del ángulo CBE es $\frac{BAD+ED}{2}$ ó $\frac{BDE}{2}$.

3.° Sea el ángulo CBA (*fig.* 63, *sin la* BE): tiro el diámetro BD. La medida del ángulo CBD es $\frac{BAD}{2}$, y la del ángulo inscripto ABD es $\frac{AD}{2}$; luego la del ángulo CBA es $\frac{BAD-AD}{2}$ ó $\frac{BA}{2}$.

TEOREMA 52 (*fig.* 64).

La medida del ángulo ABC, *cuyo vértice está entre el centro y la circunferencia, es la semi-suma de los arcos* AC *y* ED *comprendidos entre sus lados y las prolongaciones de estos.*

Tiro la cuerda DC: el ángulo $ABC = D + C$; luego la medida del ángulo ABC será la suma de las medidas de los ángulos D y C, es decir, $\frac{AC}{2}+\frac{ED}{2}$, ó $\frac{AC+ED}{2}$.

TEOREMA 53 (*fig.* 65).

La medida del ángulo, cuyo vértice se halla fuera del circulo, y está formado por dos secantes, por una secante y una tangente, ó por dos tangentes, es la semi-diferencia de los arcos comprendidos entre sus lados.

1.° Sea el ángulo ABC formado por dos secantes (*fig.* 65, *sin las lineas* BK, BH, GF *y* EF): tiro la DC, y tengo $ADC = ABC$

$+ C$, y por consiguiente $ABC = ADC - C$. La medida del ángulo ABC será, segun esto, la diferencia de las medidas de los ángulos ADC y C, esto es, $\frac{AC}{2} - \frac{DE}{2} = \frac{AC - DE}{2}$.

2.° Sea el ángulo CBH (*fig*. 65, *sin las lineas* BK, BA, DC *y* GF) formado por una secante y una tangente: tiro la cuerda EF. El ángulo $CEF = B + EFB$, y por consiguiente $B = CEF - EFB$: las medidas de estos dos ángulos son $\frac{CF}{2}$ y $\frac{EF}{2}$; luego la medida del ángulo CBF será $\frac{CF - EF}{2}$.

3.° Sea el ángulo KBH (*fig*. 65, *sin las lineas* BA, BC, DC *y* EF) formado por dos tangentes: tiro la cuerda GF. El ángulo $GFH = GBF + BGF$, y por consiguiente $GBF = GFH - BGF$. La medida del ángulo GFH es $\frac{GCF}{2}$, y la del ángulo BGF es $\frac{GEF}{2}$; luego la del ángulo GBF será $\frac{GCF - GEF}{2}$.

PROBLEMAS

CORRESPONDIENTES Á LOS TRES LIBROS PRIMEROS (*a*).

PROBLEMA 1 (*fig*. 66).

En un punto A *de una recta* CB *levantar una perpendicular á esta recta.*

Tómense sobre la recta dada á uno y otro lado del punto A dos partes iguales AB y AC; haciendo centro en los puntos B y C descríbanse con un radio cualquiera, pero mayor que AB, dos arcos, los cuales se cortarán en dos puntos [*Teor*. 46, *Recip*. 1.°]; desde uno de dichos puntos D tírese la DA, y esta será la perpendicular pedida.

En efecto, cada uno de los puntos A y D equidista de los puntos B y C; luego la DA es perpendicular á la CB.

PROBLEMA 2 (*fig*. 62).

En el estremo A *de una recta* AC, *que no se puede prolongar en el sentido* CA *contrario al suyo, levantarla una perpendicular.*

Descríbase una circunferencia que pase por el punto A, y corte á la recta AC en un punto C, tírese el diámetro COB, y la rec-

(*a*) Véase la nota primera al fin de la Geometría.

ta *BA*, que será la perpendicular pedida; puesto que el ángulo *A* es recto.

PROBLEMA 3 (*fig.* 67).

Desde un punto D *dado fuera de una recta* AB, *bajar una perpendicular á esta recta.*

Desde el punto dado *D* como centro descríbase un arco, que corte á la recta dada en dos puntos *A* y *B*; desde estos puntos descríbanse con el mismo radio dos arcos que se cortarán en un punto *C*; tírese la *DC*, y esta será la perpendicular pedida.

En efecto, cada uno de los puntos *D* y *C* se halla á igual distancia de los puntos *A* y *B*; luego la *DC* es perpendicular á la *AB*.

PROBLEMA 4 (*fig.* 68).

Dada una recta AB *de longitud definida, dividirla en dos partes iguales, por medio de una perpendicular.*

Desde los estremos *A* y *B* describo con un radio mayor que la mitad de la recta *AB* dos arcos que se cortarán en dos puntos *C* y *D*, tiro la *CD*, y esta será perpendicular á la *AB*, y la dividirá en dos partes iguales; puesto que cada uno de los puntos *D* y *C* está á igual distancia de los estremos *A* y *B* de la recta *AB*.

NOTA. Dividiendo del mismo modo cada mitad de la recta en dos partes iguales, cada una de estas en otras dos iguales, y asi sucesivamente, se podrá dividir la recta en 4, 8, 16, etc. partes iguales.

PROBLEMA 5 (*fig.* 69).

Dado un ángulo A, *una recta* DF *y un punto* D *en ella, tirar por este punto otra recta que forme con la recta dada un ángulo igual al dado.*

Con un radio arbitrario trazo el arco *BC* correspondiente al ángulo *A*, y haciendo centro en *D* trazo con el mismo radio un arco indefinido; tomo sobre este arco una parte *FE* igual al arco *BC*, y tiro la recta *DE*, la cual formará con la *DF* el ángulo *D* igual al dado *A*: puesto que son iguales sus arcos correspondientes *BC* y *EF* trazados en el mismo radio.

PROBLEMA 6 (*fig.* 70).

Por un punto G *dado fuera de una recta* CD *tirar una paralela á esta recta.*

Haciendo centro en un punto cualquiera *F* de la *CD* describo el arco *GH*, y haciendo en seguida centro en *G* describo con el mismo radio el arco indefinido *FK*; tomo sobre él una parte *FA* igual al arco *GH*, y tirando la *GA*, esta será la paralela pedida.

Para demostrarlo, tiro la *GF*: serán iguales los ángulos *DFG* y AGF, porque lo son sus arcos correspondientes GH y AF trazados con el mismo radio; luego [*Teor.* 7] la GA es paralela á la CD.

PROBLEMA 7 (*fig.* 71).

Por un punto G, *dado fuera de una recta* CD, *tirar otra recta que forme con la primera un ángulo igual á un ángulo dado.*

Por un punto cualquiera A de la CD tírese la AH, que forme con la CD un ángulo igual al dado; por el punto G tírese una paralela GF á la AH, y la GF será la paralela pedida.

En efecto, el ángulo $GFD = HAD$, por ser correspondientes entre paralelas; pero el ángulo HAD es igual al dado; luego el ángulo GFD lo es tambien.

33. Sabido es que la *regla* es un instrumento por medio del cual se trazan las líneas rectas en el papel.

Para comprobar uno de los bordes de una regla, se señala la línea determinada por él, se cambian luego los estremos de dicho borde con respecto á los de la línea trazada (quedando siempre hácia arriba la misma cara de la regla), y se traza de nuevo la línea determinada por dicho borde: si este es una línea recta, la segunda de las dos líneas trazadas coincidirá con la primera; sino lo es, entre las dos quedará una porcion del papel.

34. *Escuadra.* La escuadra es un triángulo rectángulo ABC (*fig.* 72) generalmente de madera, que sirve para tirar perpendiculares y paralelas en el papel.

Para comprobar una escuadra, se comprueban en primer lugar sus lados como en el caso de la regla; y para asegurarse de que el ángulo mayor de la escuadra es recto, se construye con la regla y el compás un ángulo recto, y se ve si dicho ángulo mayor coincide ó no con este. O bien, se ajusta uno de los lados del ángulo mayor de la escuadra con una recta indefinida, y se señala la recta determinada por el otro lado del mismo ángulo; se coloca luego la escuadra de manera que la cara superior quede debajo, que el vértice del ángulo mayor sea el mismo que antes, y que el lado de este ángulo que coincidia con la recta, coincida tambien con ella; se traza la recta determinada por el otro lado, y esta deberá coincidir con la trazada anteriormente: en el caso que así no suceda, no será recto el ángulo mayor de la escuadra.

Para levantar por medio de la escuadra una perpendicular á una recta DE (*fig.* 72) en un punto A dado en ella, se coloca la escuadra de modo que uno de sus catetos coincida con la recta dada, y que ademas el otro cateto pase por el punto dado; y tirando en seguida con el lapiz ó tira-líneas la recta determinada por este cateto, esta recta será la perpendicular pedida.

Del mismo modo se baja por medio de la escuadra desde un punto dado *F* fuera de una recta *DE* una perpendicular á esta recta.

35. Para tirar por medio de la escuadra una paralela á una recta dada *AB* (*fig.* 73) por un punto dado *D*, se ajusta con la recta dada uno cualquiera *AB* de los lados de la escuadra, se aplica una regla (ó un lado de otra escuadra) á uno de los otros dos lados *AC* ó *BC* de la escuadra *ABC*, y teniendo fija la regla, se hace correr la escuadra á lo largo de la regla, hasta que el lado *AB* de la escuadra pase por el punto dado *D*; y tirando entonces la recta *A'B'*, esta será la paralela pedida.

En efecto, el ángulo *BAC* y el *B'A'C'* son uno mismo, y por tanto son iguales; y como son correspondientes, las rectas *AB* y *A'B'* son paralelas.

Nota. Es muy cómodo y exacto en la práctica este método de tirar paralelas.

36. Tirando con la escuadra una paralela á una recta dada, se pueden levantar y bajar perpendiculares.

Supongamos que por un punto *D* (*fig.* 74) se quiera tirar una perpendicular á una recta dada *AB*.

Hágase coincidir con la recta dada un cateto *AB* de la escuadra, aplíquese la regla á la hipotenusa *AC*, y córrase en seguida la escuadra hasta que el otro cateto *BC* pase por el punto dado *D*; y tirando la *B'C'*, se tendrá la perpendicular pedida.

En efecto, la recta *B'C'* es paralela á la *BC*, y como esta es perpendicular á la *AB*, la *B'C'* será tambien perpendicular á la *AB*.

37. *Transportador.* Este instrumento (*fig.* 75), que generalmente acompaña á los estuches de matemáticas, es un semicírculo de metal ó talco, dividido en grados; y sirve para construir en el papel un ángulo de un cierto número de grados, y al contrario para hallar el número de grados que tiene un ángulo dado en el papel.

38. Para construir sobre una recta *OA* un ángulo de 50° por ejemplo, siendo el punto *O* el vértice, se coloca el transportador de modo que su centro caiga sobre el vértice *O*, y que su diámetro coincida con la recta *OA*, se señala en el papel el punto *B* correspondiente al punto de los 50°, se quita en seguida el instrumento, y se tira la recta *OB*; y se tendrá el ángulo *AOB* de 50°.

Supongamos ahora que se quiera saber el número de grados que tiene un ángulo dado *AOB*.

Colóquese el transportador de modo que su centro caiga en el vértice *O* del ángulo, y que su diámetro coincida con uno de los lados, *AO* por ejemplo, en la posicion que indica la figura;

véase entonces cuántos grados señala el punto en que el arco corta al otro lado *OB* del ángulo, y este número de grados será el del ángulo *AOB*.

39. Por medio del transportador se pueden tambien levantar y bajar perpendiculares.

Para levantar una perpendicular á una recta *OA* en un punto *O* dado en ella (*fig.* 75), se construye sobre la recta *OA*, siendo *O* el vértice, un ángulo *COA* de 90°, y la recta *CO* será la perpendicular.

Para bajar (y tambien para levantar) una perpendicular á una recta *AC* (*fig.* 76) por un punto *D* dado fuera de ella (ó en ella). se coloca el semicírculo de modo que la recta que va desde su centro al punto 90° coincida con la recta dada *AC*, y que además el diámetro *BE* pase por el punto dado *D*, se tira entonces la recta *BE*, la cual será la perpendicular pedida.

Para tirar por un punto una paralela á una recta dada con el transportador, se baja desde dicho punto una perpendicular á la recta dada, y en seguida se levanta en el mismo punto una perpendicular á la primera perpendicular, y la segunda será paralela á la recta dada.

PROBLEMA 8 (*fig.* 77).

Dados dos lados m, n *y el ángulo comprendido* K *de un triángulo, construir este triángulo.*

En el estremo *A* de una recta $AB = m$ construyo un ángulo $A = K$, tomo sobre la recta *AE* una parte $AC = n$, y tirando la *BC*, el triángulo *ABC* será el pedido.

Nota. Otro triángulo, que se construyese con los mismos datos, seria igual al *ABC*, pues los dos tendrian dos lados iguales é igual el ángulo comprendido: luego el problema es determinado.

PROBLEMA 9 (*fig.* 78).

Dados un lado m *y dos ángulos* K *y* L *de un triángulo, construir el triángulo.*

Pueden suceder dos casos: 1.° que los ángulos dados *K* y *L* sean adyacentes al lado *m*; 2.° que uno de los ángulos *K* sea adyacente, y el otro *L* opuesto al lado *m*.

1.er *caso.* En los estremos de una recta $AB = m$ (*fig.* 1) construyo dos ángulos *A* y *B* iguales á los ángulos dados *K* y *L*; y el triángulo *ABC* que resulta, será el pedido.

2.° *caso.* En el estremo *A* de una recta $AB = m$ (*fig.* 2) construyo un ángulo $A = K$, por el otro estremo *B* tiro una recta *BE* paralela á la *AF*, y construyendo en seguida el ángulo $CBE = L$, el triángulo *ABC*, que resulta, será el pedidido: puesto que el lado $AB = m$, el ángulo $A = K$, y el ángulo $ACB = CBE = L$.

Nota 1.ª Este teorema seria imposible, si la suma de los dos ángulos *K* y *L* fuese igual á dos rectos ó mayor que dos rectos. Pero si la suma de los dos ángulos *K* y *L* es menor que dos rectos, el problema es posible; pues en el primer caso que hemos considerado, es evidente que las dos rectas *AC* y *BC* se encontrarán en un punto *C*, y que por tanto habrá triángulo. En el segundo caso, la recta *BC* encontrará tambien á la *AF*; puesto que por el punto *B* no pueden pasar dos paralelas á la *AF*.

Nota 2.ª Otro triángulo que se construyese con los mismos datos, seria igual al *ABC*, pues los dos tendrian un lado igual y los ángulos adyacentes respectivamente iguales; y por tanto el problema es determinado.

PROBLEMA 10 (*fig*. 79).

Dados los tres lados m, n *y* p *de un triángulo, construir el triángulo.*

Haciendo centro en los estremos de una recta *AB* igual á cualquiera de los tres lados, al *m* por ejemplo, describo dos arcos con dos radios iguales á los otros dos lados *n* y *p*, y tiro desde el punto *C* de interseccion de estos dos arcos las rectas *CA* y *CB*; y el triángulo *ABC* será el pedido.

Nota 1.ª Este problema seria imposible, si el mayor de los tres lados fuese igual ó mayor que la suma de los otros dos [*Teor*. 13]. Pero si el mayor de los tres lados es menor que la suma de los otros dos, el problema es posible; pues cualquiera de los tres lados es en tal caso menor que la suma de los otros dos; luego $m < n + p$, $n < m + p$, y por consiguiente $m > n - p$; es decir que la distancia *m* de los centros de los arcos es menor que la suma de los radios *n* y *p*, y mayor que su diferencia; luego los arcos se cortarán en dos puntos [*Teor*. 46, *Recíproco* 1.º].

Nota 2.ª Otro cualquier triángulo, que se construyese con los mismos datos, seria igual al triángulo *ABC*; pues los dos tendrian sus tres lados respectivamente iguales: luego el problema es determinado.

PROBLEMA 11 (*fig* 80).

Dados la hipotenusa m *y un cateto* n, *construir el triángulo.*

1.ª *construccion* (fig. 1). Construyo un ángulo recto *A*, sobre uno de sus lados indefinidos tomo la parte $AC = n$, y haciendo centro en *C* describo con el radio *m* un arco, que cortará en el punto *B* al otro lado, tiro la *CB*, y el triángulo *ACB* será el pedido: pues tiene la hipotenusa $BC = m$ y el cateto $AC = n$.

2.ª *construccion* (fig. 2). Sobre una recta $BC = m$ describo un semi-círculo; desde uno de los estremos *C* del diámetro *BC* describo con el radio $CA = n$ un arco, que cortará en A á la semi-circunferencia; tiro las cuerdas AB y AC; y el triángulo ABC será el pedido: porque es recto su ángulo A, y tiene la hipotenusa $BC = m$ y el cateto $AC = n$.

Nota. Otro triángulo cualquiera, que se construyese con los mismos datos, seria igual al ABC, pues los dos tendrian las hipotenusas iguales y un cateto del uno igual á un cateto del otro: luego el problema es determinado.

*PROBLEMA 12 (*fig.* 81).

Dados dos lados m, n *y el ángulo* K *opuesto á uno de ellos* m, *construir el triángulo.*

Construyo un ángulo $BAD = K$ (*fig.* 1), tomo sobre uno de sus lados una parte $AB = n$, y haciendo centro en B, describo con el radio m un arco, que en general cortará al lado AD en dos puntos C y C'; tiro la BC, y el triángulo ABC es el pedido: pues tiene el ángulo $A = K$, el lado $AB = n$ y el lado $BC = m$.

Nota. Si el lado m opuesto al ángulo K es mayor que el lado n adyacente á dicho ángulo, el arco descrito desde B cortará á la recta indifinida AD en dos puntos C y C', uno á la derecha del punto A y otro á la izquierda; pues si desde B bajamos la perpendicular BE á la AD, siendo el radio del círculo mayor que BA, los puntos C y C' de interseccion del círculo con la recta AD distarán del punto E mas que el punto A [*Teor.* 21, *Recip.* 2.°]; luego el punto A estará comprendido entre dichos puntos C y C'. Tirando pues la recta BC, el triángulo BAC será el único que satisface al problema.

Si el lado m es igual al n (*fig.* 2) (lo que no podrá suceder á no ser agudo el ángulo K), el segundo punto de interseccion del arco con la recta AD estará en A, y el triángulo isósceles ABC será el pedido.

Si el lado m es menor que el n (*fig.* 3) (lo que exige que el ángulo K sea agudo), pero mayor que la perpendicular BE, el arco cortará á la AD en dos puntos C y C' á la derecha de A; y los dos triángulos ABC, ABC' satisfacen á la cuestion; la cual por lo tanto tiene dos soluciones.

Si el lado m es igual á la perpendicular BE, no habrá mas que un solo triángulo, que es el triángulo rectángulo ABE.

Si el lado n es menor que la perpendicular BE, el problema es imposible.

PROBLEMA 13 (*fig.* 82).

Circunscribir un círculo á un triángulo ABC; es decir, *trazar una circunferencia, que pase por los tres vértices del triángulo.*

En los puntos medios de dos de los lados, *AB* y *AC*, levanto dos perpendiculares, y haciendo centro en su punto de interseccion *O*, describo con el radio *OA* una circunferencia, que pasará por los tres vértices del triángulo: pues correspondiendo el punto *O* á las dos perpendiculares *DO* y *FO* levantadas en los puntos medios de las rectas *AB* y *AC*, equidista de los tres puntos *A*, *B* y *C* [*Teor*. 23, 1.°].

Nota 1.ª Está demostrado [*Teor*. 39] que las perpendiculares *DO* y *FO* se encuentran, y que por los tres vértices no puede pasar mas que una sola circunferencia.

Nota 2.ª Si en el punto medio *E* del tercer lado *BC* levantamos una perpendicular á esta recta, dicha perpendicular pasará por el punto *O* equidistante de *B* y *C* [*Teor*. 23, *Recip*. 1.°]. Luego *las tres perpendiculares á los tres lados de un triángulo, levantadas en los puntos medios de dichos lados, se encuentran en un mismo punto, centro del circulo circunscripto al triángulo.*

Nota 3.ª Este problema puede enunciarse asi: *trazar una circunferencia que pase por tres puntos que no estén en linea recta.*

PROBLEMA 14.

Dodo un circulo ó un arco de circulo, hallar su centro.

Tomo tres puntos en la circunferencia ó en el arco, y los uno por medio de dos cuerdas; en los puntos medios de estas cuerdas levanto dos perpendiculares, y el punto de su encuentro será el centro: pues las perpendiculares levantadas en los puntos medios de las cuerdas pasan por el centro [*Teor*. 42, *Nota*]; luego el punto de su interseccion será el centro.

PROBLEMA 15 (*fig*. 83).

Dada una recta CD *y dos puntos* A *y* B *á un mismo lado de ella, hallar un punto en la recta, tal que si desde él se tiran dos rectas á los dos puntos dados, los ángulos agudos que estas rectas formen con la recta dada, sean iguales entre si.*

Desde cualquiera de los dos puntos dados, el *B* por ejemplo, bajo una perpendicular *BE* á la *CD*, la prolongo, tomo en su prolongacion $B'E = BE$, y tiro la recta *AB'*: el punto *I* de interseccion de esta recta con la *CD* será el punto pedido.

En efecto, tirando la recta *IB*, los triángulos rectángulos *IBE*, *IB'E* son iguales [*Teor*. 15]; luego el ángulo $BIE = B'IE$: pero tambien el ángulo $AIC = B'IE$; luego los ángulos *AIC*, *BIE* son iguales.

Nota 1.ª El camino mas corto para ir desde el punto *A* al punto *B*, tocando á la recta *CD*, es el *AIB*.

En efecto, otro camino, tal como *AFB*, se compone de las dos rectas AF y FB; y si tiramos la FB', será $FB' = FB$ [*Teor.* 21];

luego $AF + FB = AF + FB'$;

pero $AF + FB' > AI + IB'$;

luego $AF + FB > AI + IB$;

NOTA 2.ª Por medio de este problema se da bola por tabla en el juego del billar.

PROBLEMA 16.

Por un punto dado en una circunferencia tirar una tangente á dicha circunferencia.

Tírese un radio al punto dado, en su estremo levántesele una perpendicular, y esta será la tangente pedida [*Teor.* 41].

PPOBLEMA 17 (*fig.* 84).

Desde un punto A *dado fuera de un círculo, tirar una tangente á la circunferencia.*

Júntense el punto dado A y el centro de la circunferencia dada C por medio de una recta AC; considerando á la AC como diámetro, descríbase una circunferencia, y tirando las rectas AB y AD á los puntos de interseccion de las dos circunferencias, estas serán las tangentes pedidas.

Para demostrarlo, tiro los radios CB y CD: el ángulo ABC, que tiene el vértice en la circunferencia ABD, y cuyos lados comprenden la media circunferencia ADC, es un ángulo recto; luego la AB es perpendicular á la CB, y por tanto la AB es tangente á la circunferencia C. Del mismo modo se demuestra que la AD es tangente á la circunferencia C.

NOTA. *Las dos porciones* AB *y* AD *de las tangentes tiradas desde el punto* A *son iguales;* pues los triángulos rectángulos ABC y ADC son iguales, porque tienen la hipotenusa comun, y un cateto del uno igual á un cateto del otro.

PROBLEMA 18 (*fig.* 85).

Tirar una tangente comun á dos circunferencias.

Sabemos que una circunferencia puede tener cinco posiciones diferentes con respecto á otra: 1.ª puede ser esterior á esta otra; 2.ª puede tocarla esteriormente; 3.ª puede cortarla; 4.ª puede tocarla interiormente; 5.ª puede ser interior á ella.

1.er *caso.* Sean O y O' los centros de las dos circunferencias, tomo sobre la recta OO', á derecha é izquierda del punto A, dos partes AB y AB' iguales al radio de la circunferencia menor, levanto en los puntos B y B' las perpendiculares RR' y SS', y desde el punto O describo con el radio OO' un arco que las cortará en los puntos R, R', S y S'; tiro las rectas OR, OR', OS y OS'; y tirando por los puntos M, N, P y Q, en que estas rectas cortan á la circunferencia O, las tangentes MM', NN', PP' y QQ' á esta circunferencia, las mismas serán tangentes á la otra circunferencia O'.

Para demostrar que la tangente MM' á la circunferencia O es tambien tangente á la circunferencia O', bajo desde el punto O' las perpendiculares $O'C$ y $O'M'$ al radio OM y á la recta MM': los triángulos BOR y $OO'C$ tienen iguales los lados OR y OO', tienen comun el ángulo COB, é iguales los ángulos R y O', por ser complementos del COB; luego estos triángulos son iguales; y por tanto $OC=OB$; luego $MC=AB=$ al radio de la circunferencia menor. Ahora, el cuadrilátero $MM'O'C$ tiene sus cuatro ángulos rectos; luego $O'M'=MC$; luego $O'M'$ es un radio de la circunferencia O'. Queda pues demostrado que la tangente MM' á la circunferencia O es perpendicular al radio $O'M'$ en su estremo M', y que por tanto es tangente á esta otra circunferencia.

Del mismo modo se demuestra que la tangente NN' á la circunferencia O, lo es tambien á la O'.

Para demostrar que la tangente PP' á la circunferencia O es tambien tangente á la circunferencia O', se bajan las perpendiculares $O'C'$ y $O'P'$ á las rectas OS y PP', y se continúa la demostracion como en el caso anterior; y del mismo modo se demuestra que la tangente QQ' á la circunferencia O lo es tambien á la circunferencia O'.

Nota. Distinguiremos estas cuatro tangentes, llamando *esteriores á las MM', NN'*, é *interiores* á las otras dos.

2.° *caso*. Aplicando la misma construccion resultarán como en el caso primero las dos tangentes esteriores; pero las dos interiores se reducen á una sola, que será la perpendicular al radio en el punto comun á las dos circunferencias.

3.er *caso*. Solo resultan las dos tangentes esteriores.

4.° *caso*. No hay mas que una tangente, que es la perpendicular al radio en el punto comun á las dos circunferencias.

5.° *caso*. El problema es imposible (*a*).

PROBLEMA 19 (*fig*. 86).

Describir sobre una recta dada AB *un arco capaz de un ángulo dado* K; es decir, *describir un arco, tal que todos los ángulos que tengan el vértice en él, y cuyos lados pasen por los estremos de la recta* AB, *sean iguales al ángulo dado* K.

En el estremo A formo un ángulo $BAC=K$, levanto en el

(*a*) La solucion que hemos dado de este problema, tiene sobre las conocidas hasta ahora las ventajas de ser mas sencilla, mas elegante, aplicable en todos casos, y de conducir siempre á soluciones exactas en la práctica.

punto A una perpendicular AD á la AC, y en el punto medio E de la AB levanto otra perpendicular á la AB: estas dos perpendiculares se encontrarán en un punto O, porque la suma de los dos ángulos OAE y OEA es menor que dos rectos. Haciendo centro en O, y describiendo con el radio OA una circunferencia, el arco AGB será el arco capaz del ángulo dado K.

En efecto, la circunferencia descrita desde el centro O con el radio OA pasará por B, porque las dos distancias OA y OB son iguales [*Teor*. 21]. La recta AC es perpendicular al radio OA, y por consiguiente es tangente á dicha circunferencia. Un ángulo cualquiera AGB inscripto, que comprenda entre sus lados el arco AFB, es igual al ángulo BAC formado por la tangente AC y la cuerda AB, pues estos dos ángulos tienen por medida la mitad del arco AFB; y como el ángulo BAC es igual al ángulo dado K, el ángulo AGB será tambien igual al ángulo K.

PROBLEMA 20 (*fig*. 87).

Dividir un ángulo BAC *en dos partes iguales*.

Haciendo centro en A, trazo con un radio cualquiera el arco BC correspondiente á este ángulo; desde los puntos B y C describo con el mismo radio dos arcos que se cortarán en un punto D [*Teor*. 46, *Recip*. 1.°]; tiro la AD, y esta dividirá al ángulo BAC en dos partes iguales.

En efecto, tirando las rectas DB y DC, los triángulos BAD y CDA son iguales, por tener sus tres lados respectivamente iguales; luego los ángulos BAO y CAO son iguales.

NOTA. Dividiendo cada ángulo mitad en dos partes iguales, cada una de estas en otras dos iguales, y asi sucesivamente, se podrá dividir un ángulo en 4, 8, 16, 32, etc. partes iguales.

PROBLEMA 21 (*fig*. 88).

Inscribir un círculo en un triángulo ABC; es decir, *trazar una circunferencia á la cual sean tangentes los tres lados del triángulo*.

Divídanse en dos partes iguales dos ángulos A y C del triángulo, y las bisectrices AO y CO se encontrarán en un punto O, que será el centro del círculo que se quiere construir: pues todos los puntos de la OA equidistan de los lados AB y AC [*Teor*. 25], y todos los puntos de la CO equidistan de los lados AC y BC; luego el punto O equidista de los tres lados AB, AC y BC; luego las tres perpendiculares OP, OQ y OR son iguales. Si pues hago centro en O, y describo con el radio OP una circunferencia, pasará esta por los puntos P, Q y R; y como los lados del triángulo son perpendiculares á los radios OP, OQ y OR en los puntos P, Q y R en que estos cortan á la circunferencia, serán tangentes al círculo; y por consiguiente el círculo quedará inscripto en el triángulo.

NOTA 1.ª Otro punto cualquiera diferente del punto *O* estará fuera de una de las dos bisectrices, ó fuera de las dos, y por consiguiente no podrá equidistar de los tres lados del triángulo [*Teor.* 25, 2.°]. Luego *en un triángulo no se puede inscribir mas que una sola circunferencia.*

NOTA 2.ª Si tiramos la bisectriz del ángulo *B*, pasará por el punto *O* [*Teor.* 25, *Recip.* 1.°]. Luego *las tres bisectrices de los tres ángulos de un triángulo se encuentran en un mismo punto, centro del circulo inscripto.*

PROBLEMA 22 (*fig.* 89).

Dadas dos rectas conmensurables AB *y* CD, *hallar su mayor medida comun, y la razon de dichas rectas.*

Siendo $AB > CD$, llévese la recta *CD* sobre la *AB* todas las veces que se pueda: supongamos que *CD* esté contenida en *AB* dos veces; y quede un residuo *EB*. Llevo *EB* sobre *CD*; supongo que esté contenida tres veces, y quede un residuo *FD*. Llevo *FD* sobre *EB*, y supongo que esté contenida dos veces, y quede un residuo *GB*. Llevo *GB* sobre *FD*; supongo esté contenida tres veces exactamente: *GB* será la mayor medida comun de las dos rectas *AB* y *CD*.

Para demostrarlo, tengo las igualdades

$$AB = 2CD + EB,\ CD = 3EB + FD,$$
$$EB = 2FD + GB,\ FD = 3GB.$$

La última de estas igualdades manifiesta que *GB* está contenida exactamente en *FD*. Estando *GB* contenida exactamente *FD*, la igualdad penúltima nos dice que *GB* está contenida exactamente en *EB*. Estando *GB* contenida exactamente en *FD* y en *EB*, la igualdad antepenúltima prueba que tambien lo está en *CD*. Por último, estando *GB* contenida exactamente en *EB* y en *CD*, lo está tambien en *AB*, segun la primera igualdad. Tenemos, pues, que *GB* es medida comun de *AB* y *CD*.

Para demostrar ahora que *GB* es la mayor medida comun de *AB* y *CD*, llamo *M* á esta mayor medida comun, y tendré que estando *M* contenida exactamente en *AB* y en $2CD$, lo estará en *EB*; estando *M* contenida exactamente en *CD* y en $3EB$, lo estará en *FD*; estando *M* contenida exactamente en *EB* y en $2FD$, lo estará en *GB*: luego *M* no es mayor que *GB*; y pues *GB* está contenida exactamente en *AB* y *CD*, se infiere que *GB* es la mayor medida comun de *AB* y *CD*.

Para hallar ahora la razon de las rectas AB y CD, tenemos, segun las igualdades anteriores,

$$\begin{aligned} EB &= 2 \times 3GB + GB = 7GB, \\ CD &= 3 \times 7GB + 3GB = 24GB, \\ AB &= 2 \times 24GB + 7GB = 55GB; \end{aligned}$$

luego

$$\frac{AB}{CD} = \frac{55}{24}.$$

PROBLEMA 23.

Dadas dos rectas inconmensurables, hallar su razon aproximada.

Procédase como en el problema anterior, hasta que se llegue á un residuo suficientemente pequeño, despréciese este residuo, y hállese como antes la razon de las dos rectas.

LIBRO CUARTO.

POLÍGONOS SEMEJANTES Y REGULARES.

CAPÍTULO I.

Lineas proporcionales.

TEOREMA 54 (*fig.* 90).

Si *se divide una recta* AB *en partes iguales, y por los puntos de division* A, C, D, B *se tiran paralelas* AE, CF, DG, BH, *que encuentren á otra recta* EH, *quedará esta tambien dividida en partes iguales entre sí.*

Para demostrar este teorema siguiendo el método general [21, *Nota* 2.ª], tiro las EI, FK, GL paralelas á la AB: tendremos $EI = AC$, $FK = CD$, $GL = DB$; y como por hipótesi son iguales las partes AC, CD y DB, las EI, FK y GL serán tambien iguales. Además, siendo EI, FK, GL paralelas á la AB, son paralelas entre sí, y por tanto los ángulos IEF, KFG, LGH serán iguales, como tambien los ángulos EIF, FKG, GLH; luego los triángulos EIF, FKG, GLH, que tienen un lado igual adyacente á dos ángulos respectivamente iguales, son iguales; luego $EF = FG = GH$.

TEOREMA 55 (*fig.* 91).

Si en un triángulo ABC *se tira una recta* DE *paralela á un lado* AC, *divide á los otros dos lados en partes proporcionales;* es decir, que la razon de las partes AD y DB será igual á la de las partes CE y EB.

Tenemos que considerar dos casos: 1.º que las dos partes AD y DB sean conmensurables; 2.º que dichas dos partes sean inconmensurables.

1.er *caso.* Supongamos que AG sea la medida comun de las rectas AD y DB, y que esté contenida en AD 7 veces, y en DB 4 veces: la razon de las dos rectas AD y DB será $\frac{7}{4}$. Tirando por los puntos de division paralelas á las bases, quedará la recta

BC dividida en partes iguales, de las que la *CE* contendrá 7, y 4 la *EB*; y pues cualquiera de estas partes es medida comun de las dos rectas *CE* y *EB*, la razon de estas dos rectas será $\frac{7}{4}$, la misma que la de las dos rectas *AD* y *BD*.

2.° *caso*. Si las rectas *AD* y *BD* (*fig*. 91, *sin las líneas auxiliares*) son inconmensurables, imaginemos dividida una de ellas, la *BD* por ejemplo, en partes iguales tan pequeñas como queramos; y llevando una de estas partes sobre la recta *DA* desde el punto *D*, el último punto de division no podrá caer en *A*, por ser las rectas inconmensurables: sea *G* el último punto de division, y tiremos la recta *GH* paralela á la *AC*. Siendo conmensurables las rectas *DG* y *DB*, tendremos, segun el primer caso, $\frac{DG}{DB}=\frac{EH}{EB}$. Ahora, como las partes en que se divide la recta *DB*, son tan pequeñas como nos acomode, se infiere que el punto *G* puede aproximarse al punto *A* en términos que la *AG* sea menor que cualquiera cantidad dada, y que por tanto *DA* es el límite de la cantidad variable *DG*; luego $\frac{AD}{DB}$ es el límite de la cantidad variable $\frac{DG}{BD}$, é igualmente $\frac{CE}{EB}$ es el límite de la variable $\frac{EH}{EB}$; luego, segun el teorema de los límites, $\frac{AD}{DB}=\frac{CE}{EB}$.

Nota. De la proporcion $AD : DB :: CE : EB$ resulta esta otra [*Aritm*. 171] $BA : BD :: BC : BE$.

Recíproco. *Si una recta* DE (fig. 92) *divide en partes proporcionales á los lados* BA *y* BC *de un triángulo, es paralela al tercer lado* AC.

Supongamos que la recta *DE* no sea paralela á la *AC*: tiremos la *DF* paralela á la *AC*, y tendremos por el teorema directo la proporcion

$$BA : BD :: BC : BF,$$

pero por hipótesi, es

$$BA : BD :: BC : BE;$$

luego, como esta proporcion y la anterior tienen sus tres primeros términos respectivamente iguales, resultaria $BF = BE$, lo que es absurdo.

40. Nota. Generalizando el método de demostracion que hemos seguido en este teorema recíproco, y en los recíprocos de los 6, 7 y 20, tendremos la regla siguiente para la demostracion de los teoremas recíprocos, que no están en el caso de la nota

del número 20, por no haberse hecho todas las hipótesis posibles sobre el sujeto de la proposicion; lo que á veces es conveniente para evitar teoremas innecesarios:

Supóngase que la conclusion no sea cierta, y ejecútese una construccion en que se verifique la hipótesi del teorema directo, dedúzcase la conclusion de dicho teorema directo, y el absurdo quedará manifiesto.

En adelante, cuando algun teorema recíproco se halle en este caso, lo advertiremos, y dejaremos la demostracion al cuidado del lector; si no es preferible la demostracion directa, como en el teorema 16 que es recíproco del 15, en los 29 y 30 que lo son del 28, y en el recíproco del 41.

TEOREMA 57 (*fig.* 93).

La bisectriz BD *de un ángulo* B *de un triángulo divide al lado* AC *opuesto á dicho ángulo en dos partes* AD *y* DC *proporcionales á los lados adyacentes* AB *y* BC.

Tiro por el punto C la CE paralela á la BD, y la prolongo hasta que encuentre á la prolongacion de la AB; tendremos

$$AD : DC :: AB : BE.$$

Ahora, el ángulo $E = ABD$, por ser correspondientes entre paralelas; el ángulo $ECB = CBD$, por ser alternos entre paralelas: y como por hipótesi es el ángulo $ABD = CBD$, serán iguales los ángulos E y ECB; luego sus lados opuestos BE y BC son iguales; y por tanto tendremos

$$AD : DC :: AB ; BC.$$

NOTA. De esta proporcion resulta esta otra:

$$AD : AC :: AB : AB + BC.$$

Recíproco. *Si una recta* BD, *que sale del vértice de un ángulo de un triángulo, divide al lado opuesto en partes proporcionales á los lados adyacentes, será bisectriz de dicho ángulo* [40].

Tambien es fácil demostrar directamente este teorema recíproco.

CAPÍTULO II.

Polígonos semejantes.

—

41. Se llaman *polígonos semejantes* los polígonos cuyos ángulos colocados en el mismo órden son iguales, y cuyos lados adyacentes á estos ángulos iguales son proporcionales.

Asi, si los polígonos $ABCDEF$ y $abcdef$ (*fig.* 94, *sin las diagonales*) tienen iguales los ángulos colocados en el mismo órden A y a, B y b, C y c, etc., y si además los lados AB y ab, BC y bc, *CD* y *cd*, etc., adyacentes á estos ángulos, son proporcionales, dichos polígonos serán semejantes.

En los polígonos semejantes los lados adyacentes á ángulos respectivamente iguales y colocados en el mismo órden se llaman lados *homólogos*. Asi, en los polígonos semejantes *ABCDEF* y *abcdef* son lados homólogos los *AB* y *ab*, *BC* y *bc*, *CD* y *cd*, etc.

TEOREMA 58 (*fig.* 95).

Si en un triángulo ABC *se tira una recta* DE *paralela á un lado* AC, *el triángulo parcial* BDE *que resulta, es semejante al triángulo propuesto.*

En efecto, los triángulos *ABC*, *DBE* tienen comun el ángulo *B*, iguales los ángulos *A* y *BDE* como correspondientes entre paralelas, y por la misma razon tambien iguales los ángulos *C* y *BED*. Ahora, siendo la *DE* paralela á la *AC*, tendremos

$$AB : BD :: BC : BE.$$

Tiremos la *EF* paralela á la *AB*, y será

$$BC : BE :: AC : AF;$$

pero $AF = DE$; luego

$$BC : BE :: AC : DE.$$

Luego $$AB : BD :: BC : BE :: AC : DE.$$

Queda pues demostrado que los triángulos *ABC* y *DBE* tienen sus ángulos respectivamente iguales, y proporcionales los lados adyacentes á los ángulos iguales, y por tanto estos triángulos son semejantes.

NOTA. Obsérvese que los lados homólogos de los triángulos semejantes están opuestos á ángulos iguales: pues siendo adyacentes á ángulos respectivamente iguales, son opuestos á los terceros ángulos, que tambien son iguales.

TEOREMA 59 (*fig.* 96).

Dos triángulos ABC, abc *son semejantes cuando tienen dos lados* AB *y* BC *del uno proporcionales á dos lados* ab *y* bc *del otro, é igual el ángulo comprendido* B = b.

Tomo sobre el lado *AB* una parte $BG = ab$, y tiro la *GH* paralela al lado *AC*: tendremos

$$AB : BG :: BC : BH.$$

Por suposicion tenemos

$$AB : ab :: BC : bc;$$

y como estas dos proporciones tienen sus tres primeros términos respectivamente iguales, resulta $BH = bc$. Luego los triángulos *GBH* y *abc* son iguales, porque tienen dos lados respectivamente iguales, é igual el ángulo comprendido; y pues el *GBH* es semejante al *ABC*, tambien el *abc* será semejante al *ABC*.

TEOREMA 60 (*fig.* 96).

Dos triángulos ABC, abc *son semejantes, cuando tienen sus tres ángulos* A, B *y* C, a, b *y* c *respectivamente iguales.*

Tomo sobre el lado *AB* una parte $BG = ab$, y tiro la *GH* paralela al lado *AC*: será el ángulo $BGH = A = a$; luego los dos triángulos *BGH* y *abc* son iguales, porque tienen un lado igual adyacente á dos ángulos respectivamente iguales; y pues el *BGH* es semejante al *ABC*, tambien el *abc* será semejante al *ABC*.

Corolario. *Dos triángulos que tienen dos ángulos respectivamente iguales, son semejantes;* pues los terceros ángulos son tambien iguales.

TEOREMA 61 (*fig.* 96).

Dos triángulos ABC, abc *son semejantes, cuando tienen sus lados proporcionales,* AB : ab : : AC : ac : : BC : bc.

Tomo sobre el lado *AB* una parte $BG = ab$, y tiro la *GH* paralela á la *AC*: los triángulos semejantes *ABC* y *BGH* nos dan la proporcion

$$AB : BG : : BC : BH;$$

pero por hipótesi tenemos la proporcion

$$AB : ab : : BC : bc;$$

luego, como estas dos proporciones tienen sus tres primeros términos respectivamente iguales, será $BH = bc$.

Tambien, por ser semejantes los triángulos *ABC* y *BGH*, es

$$AB : BG : : AC : GH,$$

y por suposicion $\quad AB : ab : : AC : ac;$

luego $\quad GH = ac.$

Luego los triángulos *GBH* y *abc* son iguales, porque tienen sus tres lados respectivamente iguales; y pues el *GBH* es semejante al *ABC*, tambien el *abc* será semejante al *ABC*.

*TEOREMA 62 (*fig.* 97).

Dos triángulos rectángulos ABC, abc *son semejantes, cuando tienen proporcionales un cateto y la hipotenusa*, AB : ab : : BC : bc.

Tomo sobre el lado *AB* una parte $BG = ab$, y tiro la *GH* paralela al lado *AC*: tendremos

$$AB : BG : : BC : BH;$$

pero por suposicion $\quad AB : ab : : BC : bc;$

luego $\quad BH = bc.$

Luego los triángulos rectángulos *GBH* y *abc* son iguales [*Teorema* 22]; y pues el triángulo *GBH* es semejante al *ABC*, tambien el *abc* será semejante al *ABC*.

TEOREMA 63 (*fig.* 96, *sin la linea* GH).

Dos triángulos ABC *y* abc *son semejantes, cuando tienen sus lados respectivamente paralelos.*

Sabemos que los ángulos cuyos lados son paralelos, son iguales ó suplemento uno de otro. No pueden ser dos ángulos A y B del triángulo ABC suplementos á la vez de dos ángulos a y b del otro, porque la suma de los cuatro ángulos A, B, a y b seria igual á cuatro rectos, siendo asi que los seis ángulos de los dos triángulos valen cuatro rectos: luego los dos triángulos tienen necesariamente dos ángulos del uno iguales á dos del otro, y por tanto dichos triángulos son semejantes.

TEOREMA 64.

Dos triángulos son semejantes, cuando tienen sus lados respectivamente perpendiculares.

Se demuestra del mismo modo que el teorema anterior.

NOTA. Cuando dos triángulos tienen sus lados respectivamente paralelos ó perpendiculares, los lados homólogos son los paralelos ó los perpendiculares, pues estos son los que se oponen á ángulos iguales.

TEOREMA 65 (*fig.* 94).

Dos polígonos ABCDEF *y* abcdef, *compuestos de un mismo número de triángulos* ABC, ACD, ADE, *etc.*, abc, acd, ade, *etc.*, *respectivamente semejantes y semejantemente dispuestos, son semejantes.*

Los ángulos B y b son iguales, porque los triángulos ABC y abc son semejantes y están semejantemente colocados. Por la misma razon los ángulos ACB y acb, ACD y acd son iguales; luego los ángulos BCD y bcd son iguales. Del mismo modo se demuestra que los demás ángulos colocados en el mismo órden son iguales.

Siendo semejantes los triángulos ABC y abc, tenemos

$$AB : ab : : BC : bc,$$
$$BC : bc : : AC : ac.$$

Siendo semejantes los triángulos ACD y acd, tenemos

$$CD : cd : : AC : ac.$$

De esta proporcion y de la anterior se deduce esta otra;

$$BC : bc : : CD : cd.$$

Del mismo modo se demuestra que los demás lados son proporcionales. Luego [41] los polígonos son semejantes.

Recíproco. *Dos polígonos* ABCDEF, abcdef *semejantes, pue-*

den descomponerse en triángulos respectivamente semejantes y semejantemente dispuestos.

Supongamos que sean iguales los ángulos A y a, B y b, C y c, etc. Tiremos las diagonales AC, AD, AE, ac, ad, ae: digo que los triángulos ABC, ACD, ADE, etc. serán respectivamente semejantes á los triángulos abc, acd, ade, etc.

En efecto, los triángulos ABC y abc tienen los ángulos B y b iguales: además, por ser semejantes los polígonos, es

$$AB : ab :: BC : bc,$$

luego [*Teor.* 59] dichos triángulos son semejantes. Por consiguiente

$$AC : ac :: BC : bc;$$

y como, por ser semejantes los polígonos, es

$$BC : bc :: CD : cd,$$

resulta

$$AC : ac :: CD : cd.$$

Tambien, por ser semejantes los triángulos ABC y abc, los ángulos ACB y acb son iguales: restándolos de los iguales por suposicion BCD y bcd, los restos ACD y acd son iguales: luego los triángulos ACD y acd son semejantes.

Del mismo modo se demuestra que los demás triángulos, que tienen la misma disposicion, son semejantes.

Nota. Segun los teoremas 60 y 61, los triángulos son semejantes cuando satisfacen á una de estas dos condiciones: *ángulos respectivamente iguales, lados proporcionales.* No sucede asi, cuando los polígonos tienen mas de tres lados, pues entonces, para que sean semejantes, han de satisfacer á las dos condiciones de la semejanza [41].

TEOREMA 66 (*fig.* 94, *sin las diagonales*).

Los perímetros AB + BC + CD + etc., ab + bc + cd + etc. *de dos polígonos semejantes* ABCDEF, abcdef *son proporcionales á sus lados homólogos.*

En efecto, tenemos por suposicion

$$AB : ab :: BC : bc :: CD : cd, \text{ etc.};$$

luego [*Aritm.* 174]

$$AB + BC + CD + \text{etc.} : ab + bc + cd + \text{etc.} :: AB : ab.$$

Consecuencias de la semejanza de los triángulos.

TEOREMA 67 (*fig.* 98).

Si tomamos por bases de dos triángulos semejantes ABC *y* abc *dos lados homólogos* AB *y* ab, *la razon de estas bases es la misma que la de las alturas* CD *y* cd.

Pueden suceder dos casos: 1.° que las alturas caigan dentro de los triángulos; 2.° que caigan fuera.

1.er *caso* (*fig.* 1). Por ser semejantes los triángulos *ABC* y *abc*, la razon de los lados homólogos *AB* y *ab* es igual á la de los lados homólogos *BC* y *bc*, y por ser semejantes los triángulos rectángulos *BCD* y *bcd*, la razon de los lados *BC* y *bc* es igual á la de los lados *CD* y *cd*; luego son iguales las dos razones *AB* : *ab* y *CD* : *cd*.

2.° *caso* (*fig.* 2). Se demuestra del mismo modo que el anterior.

TEOREMA 68 (*fig.* 99).

Si varias rectas BA, BD, BE, BC, *que salen de un punto* B, *encuentran á dos paralelas* AC *y* FI, *dividen á estas paralelas en partes proporcionales.*

Siendo la *FG* paralela á la *AD*, los triángulos *ABD* y *FBG* son semejantes: sus lados homólogos serán proporcionales; y por tanto

$$AD : FG :: BD : BG.$$

Los triángulos *BDE* y *BGH*, semejantes por la misma razon, nos dan la proporcion

$$DE : GH :: BD : BG.$$

De estas dos proporciones, que tienen comun la razon *BD* : *BG*, resulta esta otra

$$AD : FG :: DE : GH.$$

Del mismo modo se demostraria que

$$DE : GH :: EC : HI.$$

TEOREMA 69 (*fig.* 100).

La perpendicular BD, *bajada desde el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo á la hipotenusa, es media proporcional entre los segmentos* AD *y* DC *de la hipotenusa.*

Los triángulos *ABD* y *BCD*, cuyos lados son respectivamente perpendiculares, nos dan [*Teor.* 64] la proporcion

$$AD : BD :: BD : DC.$$

Corolario. *La perpendicular* BD (fig. 101), *bajada desde un punto de la circunferencia á un diámetro* AC, *es media proporcional entre los segmentos del diámetro:* pues tiradas las cuerdas *AB* y *CB*, el ángulo *ABC* es recto.

TEOREMA 70 (*fig.* 100).

Si desde el vértice B *del ángulo recto de un triángulo rectángulo* ABC *se baja una perpendicular á la hipotenusa*: 1.° *cada cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y el segmento adyacente á dicho cateto;* 2.° *los cuadrados de los catetos* AB *y*

BC *son proporcionales á los segmentos* AD *y* CD *de la hipotenusa.*

1.° Los triángulos ABD y ABC, que tienen comun el ángulo A, y los ángulos ADB y ABC iguales por ser rectos, son semejantes; luego sus lados homólogos son proporcionales; es decir,

$$AC : AB :: AB : AD.$$

Del mismo modo se demuestra la proporcion

$$AC : BC :: BC : CD.$$

2.° Acabamos de demostrar las dos proporciones

$$AC : AB :: AB : AD,$$
$$AC : BC :: BC : CD.$$

De ellas se deducen las dos igualdades

$$AB^2 = AC \times AD,$$
$$BC^2 = AC \times CD.$$

Dividiendo ordenadamente la primera por la segunda, tendremos, suprimiendo el factor AC, comun á los dos términos de la segunda razon, $AB^2 : BC^2 :: AD : CD$ (*a*).

Corolario. *Si desde un punto* B (fig. 101) *de la circunferencia se baja una perpendicular á un diámetro* AC, *y desde dicho punto* B *se tiran las cuerdas* BA *y* BC *á los estremos de este diámetro: 1.° cada cuerda es media proporcional entre el diámetro y el segmento adyacente á dicha cuerda; 2.° los cuadrados de las cuerdas* BA *y* BC *son proporcionales á los segmentos* AD *y* CD *del diámetro.*

1.° Siendo recto el ángulo ABC, acabamos de ver que cada cateto AB ó CB es medio proporcional entre la hipotenusa AC y el segmento adyacente AD ó CD.

2.° Tambien acabamos de demostrar la proporcion

$$AB^2 : BC^2 :: AD : CD.$$

TEOREMA 71, *llamado de Pitágoras* (*fig.* 100).

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa AC *es igual á la suma de los cuadrados de los catetos* AB *y* CB.

Hemos demostrado en el teorema anterior que

$$AC \times AD = AB^2,$$

y que

$$AC \times CD = BC^2.$$

Sumando estas dos igualdades ordenadamente, y separando el factor comun AC, tendremos

---

(*a*) En las proporciones entre los lados homólogos de dos triángulos semejantes es indiferente suponer que los términos de la proporcion son líneas, ó son medidas de dichas líneas; pero siempre que se trate de productos ó cuadrados de líneas, debe entenderse que son productos y cuadrados de sus valores numéricos, obtenidos estos midiendo las líneas con una misma unidad, aunque arbitraria.

$$AC(AD+CD)=AB^2+BC^2,$$

ó bien
$$AC^2=AB^2+BC^2.$$

Nota. El teorema de Pitágoras se enuncia tambien de otro modo. Siendo el cuadrado de la hipotenusa igual á la suma de cuadrados de los catetos, resulta que *el cuadrado de un cateto es igual al cuadrado de la hipotenusa menos el cuadrado del otro cateto.*

Segun esto, por el teorema de Pitágoras podremos hallar el valor numérico de cualquiera de los lados de un triángulo rectángulo, conocidos los valores numéricos de los otros dos.

Ejemplos. 1.° Hallar el valor de la hipotenusa, valiendo un cateto 4 y el otro cateto 3.

Llamando x al valor de la hipotenusa, tendremos $x^2=4^2+3^2$, ó $x^2=16+9$, ó $x^2=25$; luego $x=\sqrt{25}$, ó $x=5$.

2.° Valiendo la hipotenusa 10 y un cateto 8, hallar el valor del otro cateto.

Sea x el valor de dicho cateto: tendremos
$x^2=10^2-8^2$, ó $x^2=100-64$, ó $x^2=36$, $x=\sqrt{36}$, $x=6$.

42. Se llama *proyeccion* de una línea recta ó curva *AB* (*fig.* 102) sobre una recta *EF*, la parte *CD* de esta segunda comprendida entre las perpendiculares bajadas sobre ella desde los estremos de la primera. La proyeccion de la hipotenusa sobre uno de los catetos es este cateto.

TEOREMA 72 (*fig.* 103).

En todo triángulo el cuadrado de un lado BC *opuesto á un ángulo agudo* A *es igual á la suma de cuadrados de los otros dos lados, menos el duplo del producto de uno de ellos* AC *por la proyeccion* AD *del otro sobre él.*

Siendo agudo el ángulo *A*, la perpendicular *BD* caerá dentro de dicho ángulo *A*. En el triángulo rectángulo *BCD* tenemos por el teorema de Pitágoras

$$BC^2=DB^2+DC^2 \qquad [1].$$

En el triángulo rectángulo *ABD* tenemos por el mismo teorema

$$BD^2=AB^2-AD^2 \qquad [2];$$

y como $DC=AC-AD$ (*fig.* 1.ª), ó $DC=AD-AC$ (*fig.* 2.ª), será en las dos

$$DC^2=AC^2+AD^2-2AC\times AD \qquad [3].$$

Sumando ordenadamente las igualdades [1], [2] y [3], resulta

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AC\times AD.$$

TEOREMA 73 (*fig.* 104).

En todo triángulo obtusángulo el cuadrado del lado BC *opuesto al ángulo obtuso* A *es igual á la suma de cuadrados de los otros* *dos lados, mas el duplo de uno de ellos* AC, *multiplicado por la proyeccion* AD *del otro lado sobre él.*

Siendo obtuso el ángulo BAC, la perpendicular BD cae fuera de este ángulo. En el triángulo rectángulo BCD es

$$BC^2 = BD^2 + DC^2 \qquad [1],$$

y en el triángulo rectángulo ABD

$$BD^2 = AB^2 - AD^2 \qquad [2];$$

y como $DC = AC + AD$, será

$$DC^2 = AC^2 + AD^2 + 2AC \times AD \qquad [3].$$

Sumando ordenadamente las igualdades [1], [2] y [3], resulta

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AC \times AD.$$

Recíprocos de los 71, 72 y 73. 1.° *Si el cuadrado de un lado de un triángulo es igual á la suma de cuadrados de los otros dos lados, el ángulo opuesto á dicho lado es recto.*

2.° *Si el cuadrado de un lado de un triángulo es menor que la suma de cuadrados de los otros dos lados, el ángulo opuesto á dicho lado es agudo.*

3.° *Si el cuadrado de un lado de un triángulo es mayor que la suma de cuadrados de los otros dos lad[illegible]el ángulo opuesto á dicho lado es obtuso* [20].

TEOREMA 74 (*fig.* [illegible]

Si dos cuerdas AB *y* CD *de un circulo se cortan, las partes* AE *y* EB *de la una son reciprocamente proporcionales á las partes* CE *y* ED *de la otra* [Aritm. 198, Nota].

Tiro las cuerdas AD y BC: los triángulos EAD y EBC son semejantes, porque tienen iguales los ángulos en E, y tambien los ángulos A y C; luego sus lados homólogos son proporcionales: tendremos, pues,

$$AE : EC :: ED : EB.$$

TEOREMA 75 (*fig.* 106).

Si desde un punto E *fuera de un circulo se tiran dos secantes* EA *y* EC (que terminen en los segundos puntos A y C de intersección con la circunferencia), *dichas secantes* EA *y* EC [illegible] *en razon inversa de sus segmentos esternos* EB *y* ED [Aritm. [illegible]].

Tirando las cuerdas AD y BC, los triángulos EAD y EBC son semejantes, pues además de tener comun el ángulo E, los ángulos A y C son iguales; luego

$$AE : EC :: ED : EB.$$

TEOREMA 76 (*fig.* 107).

Si desde un punto E *fuera de un circulo se tiran una tangente* EA *y una secante* EC (que terminen, la primera en el punto de contacto, y la segunda en el segundo punto de interseccion), *la tangente* EA *es media proporcional entre la secante* EC *y su segmento esterno* ED.

Tirando las cuerdas AC y AD, los triángulos AED y AEC son semejantes, pues tienen comun el ángulo E, é iguales los ángulos EAD y ECA, porque ambos tienen por medida la mitad del arco AD; luego

$$EC : AE :: AE : ED.$$

CAPÍTULO III.

Polígonos regulares.

43. Se dice que un polígono está *inscripto* en un círculo, ó que un círculo está *circunscripto* á un polígono, cuando todos sus vértices están en la circunferencia.

Se dice que un polígono está *circunscripto* á un círculo, ó que un círculo está *inscripto* en un polígono, cuando todos sus lados son tangentes al círculo.

44. Se llama polígono *regular* el polígono que tiene todos sus lados iguales, y todos sus ángulos tambien iguales.

El triángulo equilátero y el cuadrado son dos polígonos regulares.

La proposicion siguiente demuestra que existen polígonos regulares de cualquier número de lados.

TEOREMA 77 (*fig.* 108, *sin las cuerdas* AF, FB, BG, etc.)

Si se divide una circunferencia en tres ó mas arcos iguales, las cuerdas de dichos arcos formarán un polígono regular inscripto (a).

Supongamos que los arcos AB, BC, CD, etc., en que la circunferencia está dividida, sean iguales; digo que el polígono $ABCDE$ es regular.

Los lados AB, BC, CD, etc. son iguales, porque los arcos subtendidos por ellos son iguales. Los ángulos A, B, C, etc. son iguales, porque son ángulos inscriptos que comprenden entre sus lados igual arco: luego el polígono $ABCDE$ es regular.

Corolario (*fig.* 108). *Dividiendo en dos partes iguales los arcos subtendidos por los lados de un polígono regular inscripto, las cuerdas de los arcos mitades forman un nuevo polígono regular inscripto* AFBGCHDIEK *de duplo número de lados que el propuesto.*

(a) La circunferencia puede dividirse por tanteo en cualquier número de partes iguales.

Este polígono es regular, pues está formado por las cuerdas de los arcos iguales en que está dividida la circunferencia; y el número de sus lados es doble que el del propuesto, pues á cada lado del propuesto corresponden dos lados del nuevo polígono.

TEOREMA 78 (*fig.* 109).

Si se divide una circunferencia en tres ó mas arcos iguales, las tangentes á la circunferencia en los puntos de division A, B, C, D, E, *forman un polígono regular circunscripto.*

Tiro las cuerdas *AB, BC, CD,* etc.: estas cuerdas son iguales, porque lo son sus arcos; y los ángulos formados por las tangentes y las cuerdas son todos iguales, pues cada uno tiene por medida la mitad del arco que comprenden sus lados: luego los triángulos *AEM, ABN, BCP,* etc. son isósceles, y además son iguales, por tener un lado igual adyacente á dos ángulos respectivamente iguales; luego los ángulos *M, N, P, Q* y *R* son iguales.

Resulta tambien de la igualdad de dichos triángulos, que las rectas *AM, AN, BN, BP*, etc. son iguales, y que por tanto sus dobles *MN, NP, PQ,* etc. son iguales. Luego el polígono *MNPQR* es regular.

Corolario (*fig.* 110). *Dividiendo en dos partes iguales los arcos comprendidos entre los lados de un polígono regular circunscripto, y tirando tangentes en los puntos de division, resulta un nuevo polígono regular circunscripto* MNPQRSTVXY *de duplo número de lados que el anterior.*

Este polígono es regular, porque está formado por las tangentes á la circunferencia en puntos que la dividen en partes iguales. El número de sus lados es duplo del número de lados del polígono propuesto; pues el número de arcos, en que la circunferencia queda dividida, es duplo del número de arcos en que lo estaba al principio; y por consiguiente el nuevo número de tangentes es tambien duplo del número primitivo.

TEOREMA 79 (*fig.* 111).

Si en los puntos medios de los arcos subtendidos por los lados de un polígono regular inscripto se tiran tangentes: 1.° *estas tangentes forman un polígono regular circunscripto de igual número de lados que el inscripto;* 2.° *cada dos vértices correspondientes de ambos polígonos y el centro están en línea recta.*

Los puntos medios de los arcos subtendidos por los lados del polígono regular inscripto dividen á la circunferencia en partes iguales: luego las tangentes en dichos puntos forman un polígono regular circunscripto.

Para demostrar la segunda parte, tiro la *GH*, y tengo que el punto *O* equidista de *G* y *H*; tambien *NG*=*NH*, porque en el triángulo *NGH* son iguales los ángulos *NGH* y *NHG*; luego [*Teorema* 24] la *ON* es perpendicular á la *GH*; luego [*Teor.* 42] dividirá el arco *GBH* en dos partes iguales, y por tanto la *ON* pasará por *B*, punto medio del arco *GBH*; luego los tres puntos *O*, *B* y *N* están en la línea recta.

TEOREMA 80 (*fig.* 112).

Todo polígono regular ABCDE *puede inscribirse en un círculo, y puede circunscribirse á un círculo.*

1.° Sea *O* el centro de la circunferencia, que pasa por los tres vértices *A*, *B*, *C*: hagamos ver que esta circunferencia pasará por todos los demás vértices.

Tiro los radios *OA*, *OB*, *OC* y la recta *OD*. En el triángulo *OBC* los ángulos *OBC* y *OCB* son iguales, por oponerse á lados iguales; restándolos de los ángulos *ABC* y *BCD* iguales por hipótesi, los restos *ABO* y *DCO* serán iguales: luego los triángulos *ABO* y *DCO* son iguales, por tener el lado *OB* igual al *OC*, el lado *AB*=*CD* por [illegible]egular el polígono, y el ángulo *ABO*=*DCO*; luego *OD*=[illegible]; luego la circunferencia que pasa por los tres puntos *A*, *B*, *C*, [illegible]asa tambien por el punto *D*: y como se demostraria del mismo modo que dicha circunferencia pasa por los demás vértices, se infiere que el polígono queda inscripto en el círculo.

2.° Siendo los lados del polígono cuerdas iguales del círculo circunscripto, estarán á igual distancia del centro [*Teor.* 44]; es decir, que las perpendiculares *OF*, *OG*, *OH*, etc. son iguales; luego, si hacemos centro en *O*, y describimos con el radio *OF* una circunferencia, esta pasará por los puntos *F*, *G*, *H*, etc.; y como los lados del polígono son perpendiculares á los radios *OF*, *OG*, *OH*, etc., y por tanto son tangentes á dicha circunferencia, se infiere que el polígono queda circunscripto al círculo.

45. Se llama *centro* de un polígono regular el centro de su círculo inscripto ó circunscripto. *Radios* del polígono regular son las rectas tiradas desde el centro á los vértices del polígono. *Apotemas* del polígono regular son las perpendiculares bajadas desde el centro á los lados.

NOTA. *Los triángulos, en que los radios de un polígono regular dividen á este, son todos iguales;* pues dichos triángulos tienen sus tres lados respectivamente iguales.

Segun esto, *los radios de un polígono regular dividen á sus ángulos en dos partes iguales.*

46. Se llama *ángulo en el centro* de un polígono regular el

ángulo formado por dos radios tirados á los estremos de un lado. La medida de este ángulo es evidentemente $\frac{4R}{n}$, siendo R el ángulo recto y n el número de lados.

TEOREMA 81 (*fig.* 113).

La razon del lado del cuadrado inscripto en un circulo al radio es $\sqrt{2}$.

Sea AB un lado del cuadrado inscripto; tiro los radios CA y CB. Siendo el arco ADB un cuadrante, el ángulo ACB es recto. En el triángulo rectángulo ABC tenemos por el teorema de Pitágoras $AB^2 = AC^2 + CB^2$, y llamando r al radio, es $AB^2 = r^2 + r^2$, ó $AB^2 = 2r^2$, de donde $\frac{AB^2}{r^2} = 2$, y por consiguiente $\frac{AB}{r} = \sqrt{2}$.

NOTA 1.ª En virtud de este teorema se podrá hallar el lado del cuadrado inscripto en un círculo, siendo conocido el radio, y al contrario; pues de la igualdad $\frac{AB}{r} = \sqrt{2}$, resulta $AB = r\sqrt{2}$; y por consiguiente $r = \frac{AB}{\sqrt{2}}$, ó multiplicando los dos términos de este quebrado por su denominador, para que este sea racional, será $r = \frac{AB\sqrt{2}}{2}$.

NOTA 2.ª *El lado del cuadrado inscripto en un circulo y el radio son inconmensurables;* pues su razon es inconmensurable [30].

Siendo el lado del cuadrado inscripto en un círculo la diagonal de un cuadrado cuyo lado es el radio, resulta que *la diagonal de un cuadrado y su lado son rectas inconmensurables.*

TEOREMA 82 (*fig.* 114, *sin las lineas* CO, CB *y* OD).

El lado del exágono regular inscripto en un circulo es igual al radio de dicho circulo.

Sea AB un lado del exágono regular inscripto; tiro los radios OA y OB, y tengo el ángulo $AOB = \frac{4R}{6} = \frac{2R}{3} = \frac{2}{3}R$; luego la suma $A + B$ de los otros dos ángulos del triángulo ABO valdrá $\frac{4}{3}R$; y como los dos ángulos A y B son iguales, por oponerse á los lados iguales AO y BO, cada uno de estos ángulos valdrá $\frac{2}{3}R$. Tenemos, pues, que los ángulos A y AOB son iguales; luego los dos lados OB y AB son iguales.

NOTA. Conviene enunciar tambien este teorema de este otro modo: *la cuerda de la sesta parte de la circunferencia, ó del arco de 60°, es igual al radio.*

TEOREMA 85 (*fig.* 114, *sin las lineas* OB *y* OD).

La razon del lado del triángulo equilátero inscripto en un circulo al radio es $\sqrt{3}$.

Sea CB el lado del triángulo equilátero inscripto, tiro el diámetro CA y la cuerda BA; siendo el arco CB un tercio de la circunferencia, y el arco CBA la mitad de la circunferencia, será el arco $AB = CBA - CB = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ de la circunferancia, y por consiguiente la cúerda AB es igual al radio.

En el triángulo rectángulo ABC tenemos por el teorema de Pitágoras $CB^2 = AC^2 - AB^2$, y llamando r al radio, $CB^2 = 4r^2 - r^2$, ó $CB^2 = 3r^2$, de donde $\frac{CB^2}{r^2} = 3$; y por consiguiente $\frac{CB}{r} = \sqrt{3}$.

Nota 1.ª Segun este teorema, podremos hallar el lado del riángulo equilátero inscripto, conociendo el radio, y al contrario; pues siendo $\frac{CB}{r} = \sqrt{3}$, se infiere que $CB = r\sqrt{3}$, y que $r = \frac{CB}{\sqrt{3}}$, ó multiplicando los dos términos de este quebrado por su denominador, para que este sea racional, será $r = \frac{CB\sqrt{3}}{3}$.

Nota 2.ª *El lado del triángulo equilátero, inscripto en un circulo, y el radio son inconmensurables;* pues su razon es inconmensurable [30].

Nota 3.ª *La apotema* OD (fig. 114, sin la linea *OB*) *del triángulo equilátero inscripto en un circulo es igual á la mitad del radio*; pues los triángulos semejantes *CDO* y *CBA* nos dan

$$CO : CA :: OD : AB;$$

y como *CO* es mitad de *CA*, tambien *OD* será mitad de *AB* ó del radio.

47. Se dice que una recta está dividida en *media y estrema razon*, cuando está dividida en dos partes, tales que la parte mayor es media proporcional entre dicha recta y la parte menor.

TEOREMA 84 (*fig.* 115).

El lado del decágono regular inscripto en un circulo es igual á la parte mayor del radio dividido en media y estrema razon.

Sea *AB* un lado del decágono regular inscripto, tiro los radios *CA* y *CB*: el ángulo $C = \frac{4R}{10} = \frac{2}{5}R$; luego $A + B = \frac{8}{5}R$; y como los ángulos *A* y *B* son iguales por oponerse á lados iguales, cada uno valdrá $\frac{4}{5}R$.

Esto supuesto, divido el ángulo A en dos partes iguales por la recta AD, y tendré [*Teor.* 57]

$$BD : DC :: AB : AC \qquad [1].$$

Ahora, valiendo $\frac{2}{5}R$ el ángulo CAD, los lados AD y CD son iguales, por oponerse á los ángulos iguales C y CAD. Tambien será el ángulo $ADB = C + CAD = \frac{4}{5}R$ [*Teor.* 14, *Corol.* 1.°], y por tanto los lados AB y AD, opuestos á los ángulos iguales ADB y ABD, son iguales; luego $DC = AB$; y la proporcion [1] será

$$BD : DC :: DC : BC.$$

Queda pues demostrado que el radio BC está dividido en D en media y estrema razon, y que su segmento mayor DC es igual al lado AB del decágono regular inscripto.

NOTA. Hemos visto [*Teor.* 81] que la razon del lado del cuadrado incripto en un círculo al radio es $\sqrt{2}$; luego, si tomamos por unidad el radio, el valor del lado del cuadrado inscripto es $\sqrt{2}$. Por consiguiente, si las construcciones geométricas fueren exactas, que no lo son, hallaríamos con exactitud una recta cuyo valor fuese $\sqrt{2}$. Lo mismo diríamos de otra raiz cuadrada inconmensurable cualquiera $\sqrt{n}$, que es el valor de una recta media proporcional entre las rectas cuyos valores son 1 y n.

TEOREMA 85.

Los polígonos regulares de un mismo número de lados son semejantes.

Consideremos por ejemplo dos exágonos regulares: valiendo los seis ángulos de un exágono 8 rectos [*Teor.* 26], cada ángulo del exágono regular valdrá $\frac{8R}{6}$; luego los ángulos de ambos polígonos son iguales.

Siendo iguales los lados de cada polígono, la razon de un lado de un polígono á otro lado del otro polígono es siempre la misma: luego los lados adyacentes á ángulos iguales son proporcionales. Los polígonos propuestos tienen pues sus ángulos respectivamente iguales, y proporcionales los lados adyacentes á ángulos iguales; y por tanto dichos polígonos son semejantes.

TEOREMA 86 (*fig.* 116).

Los perímetros de dos polígonos regulares ABCDE, abcde *de un mismo número de lados son proporcionales á sus radios* AO *y* ao, *y á sus apotemas* OF *y* of.

Sean P y p los perímetros de los dos polígonos: por ser semejantes estos polígonos, tendremos [*Teor.* 66]

$$P : p :: AB : ab.$$

Si ahora tiramos los radios OB y ob, los triángulos OAB y oab serán semejantes, por ser iguales los ángulos OAB y oab, como mitades de los iguales EAB y eab [45, *Nota*], y tambien iguales los ángulos OBA y oba por la misma razon: luego [*Teor*. 67]

$$AB : ab :: OA : oa :: OF : of;$$

y por consiguiente $P : p :: AO : ao :: OF : of.$

TEOREMA 87 (*fig*. 117).

Toda linea convexa (a) *cerrada* ABCD, *envuelta por otra linea cualquiera cerrada* PQRST, *es menor que esta.*

No pueden ser iguales todas las infinitas líneas $ABCD$, $PQRST$, etc., que encierran á la superficie plana $ABCD$; pues tirando la recta MN, que no corte á la $ABCD$, será $MN < MPQN$, y añadiendo á ambos miembros la parte $MTSRN$, resulta $MNRST < PQRST$.

No siendo iguales todas las líneas en número infinito, que encierran á la superficie plana $ABCD$, sucederá uno de estos dos casos: que existirán dos ó mas de estas líneas, las cuales serán iguales en magnitud y menores que todas las demás, ó que existirá una sola menor que todas las demás.

Hemos visto que la $PQRST$ es mayor que la $MNRST$; luego la $PQRST$ no es de las menores: lo mismo se puede demostrar de otra cualquiera de las líneas mencionadas, diferente de la $ABCD$; luego no pueden existir dos de estas líneas que sean iguales en magnitud, y menores que todas las demás; luego existe necesariamente una sola menor que todas las demás; y pues ninguna diferente de la $ABCD$ es de las menores, esta es la menor.

Corolarios. 1.° *La circunferencia es mayor que el perímetro de todo polígono inscripto, y menor que el de todo polígono circunscripto.*

2.° *El perímetro de un polígono regular inscripto, que tenga duplo número de lados que otro polígono regular inscripto, es mayor que el de este.*

3.° *Si desde un punto* C (fig. 118) *fuera de un círculo se le tiran dos tangentes* CA *y* CB, *que terminen en los puntos* A *y* B *de contacto, la suma de dichas dos tangentes es mayor que el arco* ADB *comprendido entre ellas:* pues tirando la cuerda AB, tenemos por el teorema

$$AB + AC + BC > ADB + AB;$$

luego $$AC + BC > ADB.$$

(*a*) Se llama línea *convexa* la línea que no puede ser cortada por una recta en mayor número de puntos que dos.

TEOREMA 88.

Toda linea curva es el limite de una linea quebrada cuyos vértices estén en la curva, y cuyos lados puedan llegar á ser menores que cualquiera cantidad dada.

Pues si los lados de la línea quebrada pueden llegar á ser menores que cualquiera cantidad dada, es evidente que la curva y la línea quebrada llegarán á confundirse sensiblemente; y que por lo tanto la diferencia de sus longitudes podrá llegar á ser tan pequeña como se quiera, es decir, que la curva es el límite de dicha línea quebrada.

Corolario. *La circunferencia es el limite de los perimetros de los poligonos regulares inscriptos:* pues si inscribimos un polígono regular, despues otro polígono regular de duplo número de lados [*Teor.* 77, *Corol.*], despues otro de duplo número de lados que el último, y continuamos esta operacion indefinidamente, la circunferencia quedará dividida en arcos menores que cualquier cantidad dada, y con mayor razon los lados del polígono, que son menores que dichos arcos, llegarán á ser menores que cualquiera cantidad asignable: luego la circunferencia es el límite de dichos perímetros.

TEOREMA 89.

Las circunferencias c *y* c′ *son proporcionales á sus radios* r *y* r′.

Sean p y p' los perímetros de dos polígonos regulares semejantes inscriptos en las circunferencias c y c': tendremos, segun el teorema 86, la proporcion $\frac{p}{r}=\frac{p'}{r'}$. Ahora, como las circunferencias c y c' son lós límites de los perímetros p y p', y por consiguiente las cantidades constantes $\frac{c}{r}$ y $\frac{c'}{r'}$ son los límites de las variables $\frac{p}{r}$ y $\frac{p'}{r'}$, tendremos en virtud del teorema de los límites

$$\frac{c}{r}=\frac{c'}{r'}.$$

Corolario. *Las circunferencias son proporcionales á sus diámetros*; esto es, $c : 2r :: c' : 2r'$; y por consiguiente la razon de una circunferencia á su diámetro es igual á la razon de otra circunferencia cualquiera á su diámetro; luego *la razon de la circunferencia al diámetro es siempre la misma, ó es constante.*

PROBLEMAS

RELATIVOS AL LIBRO CUARTO.

PROBLEMA 24 (*fig.* 119).

Dividir una recta en cualquier número de partes iguales.

Supongamos que se quiera dividir la recta *AB* en cinco partes iguales.

Por uno de sus estremos *A* tiro una recta indefinida *AC*, tomo sobre esta con una abertura cualquiera de compás, empezando desde el punto *A*, cinco partes iguales *AD*, *DE*, etc.; tiro la *HB*, y las paralelas *GI*, *FK*, *EL* y *DM* á la *HB*, las cuales dividirán á la recta *AB* en cinco partes iguales [*Teor*. 54].

PROBLEMA 25 (*fig.* 120).

Dividir una recta EF *en dos partes proporcionales á las dos* AC *y* CB *de otra recta* AB.

Por uno de los estremos *E* de la recta dada *EF* tiro otra recta indefinida *EG*, tomo sobre esta las dos partes *EH* y *HK* iguales á las *AC* y *CB*, tiro la *KF*, y por el punto *H* la paralela *HM* á la *KF*: las partes *EM* y *MF*, en que queda dividida la *EF*, serán proporcionales á las *EH* y *HK* [*Teor*. 55].

PROBLEMA 26 (*fig.* 121).

Hallar una cuarta proporcional á tres rectas dadas m, n, p; es decir, *construir por medio de la regla y el compás una recta que sea el cuarto término de la proporcion* m : n : : p : x.

1.ª *construccion.* Sobre los lados de un ángulo *A* tomo las partes $AD = m$, $DC = n$, $AE = p$; junto el punto *D* con el *E*, y por el punto *C* tiro la *CB* paralela á la *DE*: la *EB* será la cuarta proporcional, ó el valor de x.

En efecto, siendo la *DE* paralela á la *BC*, será

$$AD : DC : : AE : EB,$$

ó

$$m : n : : p : EB.$$

2.ª *construccion.* Sobre los lados de un ángulo *A* tomo las partes $AD = m$, $AC = n$, $AE = p$; junto el punto *D* con el *E*, y por el punto *C* tiro la *CB* paralela á la *DE*, y la *AB* será la cuarta proporcional; puesto que tenemos [*Teor*. 55, *Nota*]

$$AD : AC : : AE : AB,$$

ó

$$m : n : : p : AB.$$

3.ª *construccion.* Sobre una recta indefinida tomo las partes $AD = m$, $AC = n$; tiro por el punto *D* una recta cualquiera $DE = p$, junto los puntos *A* y *E*, y tiro por el punto *C* la *CB* paralela á la *DE;* y esta recta *CB* será la cuarta proporcional: pues siendo semejantes los triángulos *ABC* y *ADE*, es

$$AD : AC :: DE : CB,$$

ó $$m : n :: p : CB.$$

PROBLEMA 27.

Hallar una tercera proporcional á dos rectas dadas m *y* n; es decir, *construir por medio de la regla y el compás una recta que sea el cuarto término de la proporcion continua* m : n : : n : x.

Este problema se resuelve del mismo modo que el anterior, del cual es un caso particular.

PROBLEMA 28 (*fig.* 122).

Hallar una media proporcional entre dos rectas dadas m *y* n.

1.ª *solucion.* Tomo sobre una recta indefinida las partes $AB = m$, $BC = n$ á continuacion una de otra; considerando á la recta *AC* como diámetro, describo un semicírculo, levanto en *B* la perpendicular *BD* á la *AC*, y la *BD* será la media proporcional pedida [*Teor.* 69, *Corol.*].

2.ª *solucion.* Tomo sobre una recta *AC* igual á la mayor *m* de las dos rectas una parte $AB = n$, describo sobre *AC* un semicírculo, levanto la perpendicular *BD*, y tiro la cuerda *AD:* esta será la media proporcional [*Teor.* 70, *Corol.*].

Nota. Además de los métodos que acabamos de dar, para hallar cuartas, terceras y medias proporcionales, existen otros varios, aunque no tan sencillos, fundados respectivamente en los teoremas 74 y 75; 69, 70, 74 y 76; 76 : su investigacion será un buen ejercicio para el lector.

PROBLEMA 29 (*fig.* 123).

Dividir una recta AB *en media y estrema razon.*

En uno de los estremos *A* de la recta levanto una perpendicular $AC = \frac{1}{2} AB$; haciendo centro en *C*, describo con el radio *CA* un círculo, tiro la *BC*, llevo la *BD* sobre la *BA*, y el punto *E* será el que divide á la recta en media y estrema razon.

En efecto, prolongo la *BC* hasta *F*, y tengo [*Teor.* 76]

$$BF : BA :: BA : BD,$$

de donde $$BA : BF - BA :: BD : BA - BD,$$

ó $$BA : BE :: BE : AE.$$

PROBLEMA 30 (*fig.* 96 *sin la GH, y fig.* 94).

Sobre una recta dada, considerada como lado homólogo de un lado de un polígono dado, construir un polígono semejante á este.

Supongamos en primer lugar que sobre la recta *ac* (*fig.* 96), lado homólogo de *AC*, se quiera construir un triángulo semejante al *ABC*.

En los puntos *a* y *c* construyo dos ángulos iguales á los *A* y *C*; y el triángulo *abc* que resulta, será semejante al *ABC*.

Supongamos ahora que sobre la recta *ab* (*fig.* 94), lado homólogo del *AB*, queramos construir un polígono semejante al *ABCDEF*.

Tiro las diagonales *AC*, *AD*, *AE*: sobre la recta *ab* construyo un triángulo *abc* semejante al *ABC*, sobre la *ac* construyo un triángulo *acd* semejante al *ACD*, sobre la *ad* otro *aed* semejante al *AED*, y sobre la *ae* otro *aef* semejante al *AEF*: el polígono *abcdef* será semejante al *ABCDEF* [*Teor.* 65].

PROBLEMA 31 (*fig.* 124).

Dividir una circunferencia en cuatro partes iguales, é inscribir en ella un cuadrado.

Tiro dos diámetros *AB* y *CD* perpendiculares entre sí, los cuales dividirán á la circunferencia en los cuatro arcos evidentemente iguales *AC*, *CB*, *BD* y *DA*: tirando ahora las cuerdas de estos arcos, resultará el cuadrado inscripto *ACBD*.

PROBLEMA 32 (*fig.* 125, *sin el triángulo ACE*).

Dividir una circunferencia en seis partes iguales, é inscribir en ella un exágono regular.

Llévese el radio como cuerda sobre la circunferencia, y esta quedará dividida en seis arcos iguales *AB*, *BC*, *CD*, etc.; puesto que el radio es la cuerda de la sesta parte de la circunferencia [*Teor.* 82, *Nota*]: tirando las cuerdas correspondientes á los seis arcos, se tendrá el exágono regular inscripto *ABCDEF* [*Teorema* 77].

PROBLEMA 33 (*fig.* 125).

Inscribir en un círculo un triángulo equilátero.

Inscríbase el exágono regular *ABCDEF*, y tírense las cuerdas *AC*, *CE* y *EA* de arcos duplos, de manera que formen un triángulo; y este será el triángulo equilátero inscripto.

PROBLEMA 44.

Dividir una circunferencia en diez partes iguales, é inscribir en ella un decágono regular.

Divídase el radio en media y estrema razon, y llevando la parte mayor como cuerda sobre la circunferencia, quedará esta dividida en diez arcos iguales; puesto que la parte mayor del radio dividido en media y estrema razon es igual al lado del decágono regular inscripto [*Teor.* 84]: tirando en seguida las cuerdas correspondientes á los diez arcos, se tendrá el decágono regular inscripto.

PROBLEMA 35.

Inscribir en un círculo un pentágono regular.

Inscríbase el decágono regular, y tírense las cuerdas de los arcos duplos, de manera que formen un pentágono; y este será el pedido.

PROBLEMA 36.

Dividir una circunferencia en quince partes iguales, é inscribir en ella un pentedecágono regular.

Llévese como cuerda el radio sobre la circunferencia, y el arco correspondiente será $\frac{1}{6}$ de la circunferencia: llévese como cuerda sobre este arco, desde uno de sus estremos, la parte mayor del radio dividido en media y estrema razon, y el arco correspondiente será $\frac{1}{10}$ de la circunferencia; la diferencia de estos arcos será $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$ de la circunferencia; luego tomando la cuerda de este arco, y llevándola sobre la circunferencia, quedará esta dividida en quince partes iguales: tirando en seguida las cuerdas, se tendrá el pentedecágono regular inscripto.

NOTA. Acabamos de ver que se pueden inscribir en un círculo geométricamente, es decir sin tanteo, polígonos regulares de 6 ó 3 lados, de 4, de 10 ó 5, y de 15. Como, estando inscripto un polígono regular, es fácil [*Teor.* 77, *Corol.*] inscribir otro de duplo número de lados que él, se infiere que sabremos inscribir, sin tanteo, en la circunferencia los polígonos regulares cuyo número de lados es cualquiera de los siguientes:

4,	8,	16,	32,	64.....
3,	6,	12,	24,	48.....
5,	10,	20,	40,	80.....
15,	30,	60,	120,	240.....

PROBLEMA 37 (*fig.* 126).

Dado un lado de un polígono regular inscripto, hallar el lado del polígono semejante circunscripto.

Sea $AB=a$ un lado de un polígono regular inscripto, $CD=b$ será el lado del polígono regular circunscripto semejante [*Teoremas* 79 *y* 85]; sea r el radio del círculo: tendremos [*Teor.* 67]

$$AB : CD :: OF : OE,$$

ó

$$a : b :: OF : r.$$

Pero en el triángulo rectángulo OAF tenemos, por el teorema de Pitágoras, $OF^2 = OA^2 - AF^2$, ó bien $OF^2 = r^2 - \frac{a^2}{4}$, y por consiguiente $OF = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$; luego la proporcion será

$$a : b :: \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} : r, \text{ de donde } b = \frac{ar}{\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}}.$$

Nota. Esta ecuacion puede servir para resolver el siguiente problema general: *dadas dos de las tres cantidades* a, b *y* r, *hallar la tercera* [Alg. 107].

PROBLEMA 38 (*fig.* 127).

Dado un lado de un polígono regular inscripto, hallar el lado de otro polígono regular inscripto de duplo número de lados.

Sea $AB = a$ un lado de un polígono regular inscripto, $AC = b$ será el lado del polígono regular inscripto de duplo número de lados.

Siendo el arco ACB á lo mas $\frac{1}{3}$ de la circunferencia, y por tanto el arco AC á lo mas $\frac{1}{6}$ de la circunferencia, será el ángulo AOC agudo; luego [*Teor.* 72]

$$AC^2 = AO^2 + CO^2 - 2CO \times OD;$$

y como $OD = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$, será $b^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$,

ó $$b = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}}\ (a).$$

Nota. Esta relacion puede servir para hallar cualquiera de las tres cantidades a, b y r, dadas las otras dos [*Alg.* 107].

PROBLEMA 39.

Hallar la razon aproximada π *de la circunferencia al diámetro* (b).

Sabemos [*Teor.* 89, *Corol.*] que la razon de la circunferencia al diámetro es siempre la misma; por consiguiente, si hallamos

---

(*a*) Esta espresion puede ponerse bajo la forma

$$b = \sqrt{\frac{r(2r+a)}{2}} - \sqrt{\frac{r(2r-a)}{2}}\ [Alg.\ 163].$$

(*b*) Lambert demostró el primero que la razon de circunferencia al diámetro es un número inconmensurable. Véase la Geometría de Legendre.

el valor de una circunferencia cuyo diámetro sea 1, este valor, que será evidentemente la razon de esta circunferencia á su diámetro, será tambien la razon pedida. Vemos pues que la cuestion se reduce á hallar el valor aproximado de una circunferencia cuyo diámetro es 1.

Siendo el diámetro 1, el lado del cuadrado inscripto, que en general vale $r\sqrt{2}$, vale ahora $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, puesto que $r = \frac{1}{2}$.

Por el problema último podremos ahora hallar el lado del octógono regular inscripto, y en seguida el lado del polígono regular inscripto de 16 lados, despues el del polígono regular inscripto de 32 lados; y asi sucesivamente.

A medida que va duplicándose el número de lados de los polígonos regulares inscriptos, la diferencia de sus perímetros á la circunferencia va disminuyendo, y puede llegar á ser menor que cualquiera cantidad por pequeña que sea, puesto que la circunferencia es el límite de los perímetros de los polígonos inscriptos [*Teor.* 88. *Corol*].

Cuando se haya calculado el lado de un polígono regular de un número de lados bastante grande, segun la aproximacion que se quiera obtener, se hallará el lado del polígono semejante circunscripto [*Prob.* 37], y multiplicando uno y otro por el número de lados del polígono, se tendrán los dos perímetros, menor el uno y mayor el otro que la circunferencia; y por consiguiente la parte comun de ambos perímetros será el valor aproximado de la circunferencia con menor error que una unidad del último órden decimal de dicha parte comun.

En efecto, supongamos que el perímetro del polígono circunscripto sea $3{,}141\alpha\beta\ldots$ y el del inscripto $3{,}141\alpha'\beta'\ldots$ ($\alpha,\beta,\alpha',\beta'\ldots$ representan guarismos): tendremos evidentemente que el valor c de la circunferencia será menor que 3,142 y mayor que 3,141; de suerte que el valor c de la circunferencia se halla comprendido entre dos cantidades que se diferencian en 1 milésima; luego $c = 3{,}141$ con menor error que una milésima.

Nota. Nos hemos valido para la resolucion de este problema del lado del cuadrado inscripto; pero en su lugar nos podríamos valer del de otro polígono regular cualquiera, por ejemplo del lado del exágono, y continuar como en el caso anterior.

Arquímedes halló que la razon de la circunferencia al diámetro es $\frac{22}{7}$, Mecio halló $\frac{355}{113}$, y los modernos han hallado en decimales 3,14159 26535 89793... El logaritmo de este número es 0,49714 98726 94133...

PROBLEMA 40.

Dado el radio, hallar la circunferencia, y al contrario.

Siendo π la razon de la circunferencia c al diámetro $2r$, es $\frac{c}{2r} = \pi$; de donde resulta $c = 2\pi r$, y $r = \frac{c}{2\pi}$.

Ejemplos. 1.° ¿Cuál es el valor de una circunferencia cuyo radio es 10 varas?

Hemos hallado $c = 2\pi r$; luego $c = 2 \times 3,14159 \times 10$, ó $c = 62,8318$ varas.

2.° ¿Cuál es el radio de una circunferencia cuya longitud es 1000 varas?

Tenemos $r = \frac{c}{2\pi} = \frac{1000}{2 \times 3,14159} = \frac{500}{3,14159} = 159,15$ varas.

3.° ¿Cuál es la longitud de un arco de 73 grados, siendo el radio de 25 varas?

El valor de la circunferencia es en el caso actual $3,14159 \times 50$; la longitud de un arco de un grado de dicha circunferencia es $\frac{3,14159 \times 50}{360}$, y la del arco de 73° será $\frac{3,14159 \times 50 \times 73}{360}$.

Resuélvase por una proporcion.

4.° La longitud de un arco, siendo el radio de 21 varas, es 33,27 varas, ¿cuántos grados tendrá dicho arco?

La longitud de la circunferencia es $3,14159 \times 42$ varas: el valor en grados del arco de 1 vara será $\frac{360}{3,14159 \times 42}$; luego el valor en grados del arco de 33,27 varas será $\frac{360 \times 33,27}{3,14159 \times 42}$.

Resuélvase por una proporcion.

5.° Hallar el número de grados del arco que rectificado es igual al radio.

Siendo el radio r, la longitud de la circunferencia es $2\pi r$: formaremos pues la proporcion

$$2\pi r : r : 360° : x°;$$

$$x = \frac{360° \times r}{2\pi r}, \text{ ó } x = \frac{180°}{\pi} = 57°,29578.$$

LIBRO QUINTO.

AREAS DE LOS POLÍGONOS Y DEL CÍRCULO.

CAPÍTULO I.

Areas de los polígonos.

48. AREA de una superficie limitada es la medida ó valor numérico de esta superficie, es decir, el número de veces que dicha superficie contiene á la unidad, ó mas generalmente la razon de la superficie á la unidad.

Para medir una superficie limitada, se toma por unidad un cuadrado.

Dos superficies limitadas son *equivalentes*, cuando tienen igual área y no pueden coincidir; y son *iguales*, cuando pueden coincidir.

TEOREMA 90 (*fig.* 128).

La razon de dos rectángulos ABCD, EFGH, *que tienen iguales bases* AB *y* EF, *es la misma que la de sus alturas* AD *y* EH.

Puede suceder que las alturas *AD* y *EH* sean conmensurables ó inconmensurables.

1.° Si las alturas *AD* y *EH* son conmensurables, sea *DI* su medida comun, que supondremos quepa en la altura *AD* 7 veces y en la altura *EH* 4 veces: la razon de *AD* á *EH* es $\frac{7}{4}$ [30].

Tirando por los puntos de division paralelas á las bases, quedará dividido el rectángulo *ABCD* en 7 rectángulos parciales, y el rectángulo *EFGH* en 4: todos estos rectángulos parciales son iguales, pues tienen bases iguales y alturas iguales [*Teor.* 32], luego cualquiera de ellos es medida comun de los dos rectángulos *ABCD* y *EFGH*; y por tanto [30] la razon de los dos rectángulos *ABCD* y *EFGH* es tambien $\frac{7}{4}$, la misma que la de sus alturas.

2.° Si las alturas son inconmensurables, imaginemos dividida una de ellas, por ejemplo la *EH*, (*fig.* 127, *sin las lineas auxiliares*) en partes iguales, y llevando una de estas partes sobre la altura *AD* desde el punto *A*, el último punto de division no podrá caer en D, por ser las alturas inconmensurables: sea I el último punto de division, y construyamos el rectángulo $ABLI$. Por ser conmensurables las alturas AI, EH, tendremos, segun el primer caso, $\frac{ABLI}{EFGH} = \frac{AI}{EH}$. Siendo tan pequeñas como queramos las partes en que se supone dividida la EH, el punto I podrá acercarse al punto D cuanto se quiera; luego el rectángulo $ABCD$ es el límite del rectágulo variable $ABLI$, y por consiguiente la cantidad $\frac{ABCD}{EFGH}$ es el límite de la variable $\frac{ABLI}{EFGH}$: por la misma razon la cantidad $\frac{AD}{EH}$ es el límite de la variable $\frac{AI}{EH}$; luego, segun el teorema de los límites, $\frac{ABCD}{EFGH} = \frac{AD}{EH}$.

Nota. No hay que decir que las dos alturas AD y EH se han de medir con la misma unidad, aunque arbitraria.

Corolario. *Dos rectángulos que tienen iguales alturas, son proporcianales á sus bases:* pues las alturas de los rectángulos pueden considerarse como bases, y las bases como alturas.

TEOREMA 91.

La razon de dos rectángulos cualesquiera R *y* R' *es la misma que la del producto* a × b *de la altura y base del primero al producto* a' × b' *de la altura y base del segundo.*

Sea R'' un tercer rectángulo, que tenga la altura a del primero y la base b' del segundo.

Los rectángulos R y R'', que tienen igual altura, son proporcionales á sus bases; esto es,

$$R : R'' : : b : b'.$$

Los rectángulos R'' y R', que tienen igual base, son proporcionales á sus alturas; esto es,

$$R'' : R' : : a : a'.$$

Multiplicando ordenadamente estas proporciones, y suprimiendo el factor R'' comun á los dos términos de la primera razon, resulta

$$R : R' : : a \times b : a' \times b' \text{ (a).}$$

(*a*) En las proporciones

$$R \; : R'' : : b : b',$$
$$R'' : R' : : a : a'$$

es indiferente el considerar á R, R', R'' como superficies, ó como sus valores numéricos ó áreas: pero cuando se multiplican las dos proporciones, implícitamente se admite que estas letras representan números; pues seria absurdo el pretender multiplicar una superficie por otra.

Nota. Las cuatro rectas a, b, a' y b' se han de medir con una misma unidad arbitraria.

Ejemplo. Hallar la razon de dos rectángulos, tales que la base del primero sea 3 varas, su altura 13 pies, la base del segundo 8 pies y la altura 39 pulgadas.

Como en este ejemplo las unidades á que están referidas las alturas y bases, ó sean las *dimensiones* de los dos rectángulos, son diferentes, es menester referirlas á la misma unidad, por ejemplo á la pulgada: entonces las dimensiones del primer rectángulo serán 108 pulgadas y 156 pulgadas, y las dimensiones del segundo 96 pulgadas y 39 pulgadas: luego si llamamos, para mayor claridad, R y R' á los dos rectángulos, tendremos $\frac{R}{R'} = \frac{108 \times 156}{96 \times 39} = 4\frac{1}{2}$; luego la razon del primer rectángulo al segundo es $4\frac{1}{2}$; ó en otros términos, el primer rectángulo es $4\frac{1}{2}$ veces mayor que el segundo.

TEOREMA 92.

El área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura; si la unidad lineal es el lado del cuadrado que se toma por unidad de superficie.

Sea R el rectángulo, b y a su base y altura, C el cuadrado que se toma por unidad, l su lado. Como el cuadrado es un rectángulo, cuyos lados son iguales, tendremos, segun el teorema anterior,

$$\frac{R}{C} = \frac{a \times b}{l^2};$$

y como el primer miembro es la medida del rectángulo R [48], ó su área, resulta que *el área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura, dividido por la segunda potencia del lado del cuadrado que se toma por unidad; siendo medidas las tres rectas con una misma unidad arbitraria.*

Si el lado del cuadrado que se toma por unidad de superficie, es la unidad lineal, entonces $l^2 = 1$; por consiguiente

$$\frac{R}{C} = a \times b,$$

que es el enunciado del teorema.

Nota. En todas las reglas de medicion de superficies que siguen, tomaremos por unidad lineal, puesto que esta es arbitraria, el lado del cuadrado tomado por unidad superficial; y asi evitaremos en todas ellas la division del producto de dos rectas por la segunda potencia del lado de dicho cuadrado.

Corolario. *El área de un cuadrado es igual á la segunda* *potencia de su lado*; pues el cuadrado es un rectángulo cuya base y altura son iguales (*a*).

Segun esta regla, un pie cuadrado, es decir, un cuadrado que tiene por lado un pie lineal, tiene $12 \times 12 = 144$ pulgadas cuadradas; una vara cuadrada tiene $3 \times 3 = 9$ pies cuadrados; un metro cuadrado tiene $10 \times 10 = 100$ decímetros cuadrados; etc.

TEOREMA 93 (*fig.* 129).

El área de un paralelógramo ABCD *es igual al producto de su base por su altura.*

Levanto en los puntos *A* y *B* las perpendiculares *AF* y *BE* á la *AB* hasta que encuentren al lado *DC* ó á su prolongacion: los triángulos rectángulos *ADF* y *BEC*, que tienen las hipotenusas *AD* y *BC* iguales, como tambien los catetos *AF* y *BE*, son iguales [*Teor.* 22]. Restando del trapecio *ABCF* el triángulo *BEC*, queda el rectángulo *ABEF*; y restando del mismo trapecio el triángulo *ADF*, queda el paralelógramo *ABCD*: y como, si de una misma cantidad se restan cantidades iguales, los restos son iguales, se infiere que el rectángulo *ABEF* es equivalente al paralelógramo *ABCD* [48].

Ahora bien, el área del rectángulo *ABEF* es igual á $AB \times BE$; luego el área del paralelógramo *ABCD* es tambien igual á $AB \times BE$.

Corolarios. 1.° *Los paralelógramos de igual base y de igual altura son equivalentes.*

2.° *Las áreas de dos paralelógramos cualesquiera son proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas;* luego si los paralelógramos tienen bases iguales, las áreas serán proporcionales á sus alturas; y si tienen iguales alturas, serán proporcionales á sus bases.

TEOREMA 94 (*fig.* 130).

El área de un triángulo ABC *es igual á la mitad del producto de su base* AC *por su altura* BD.

Tiro por los vértices *B* y *C* dos paralelas á los lados opuestos, y resultará un paralelógramo *ABEC* de igual base y de igual altura que el triángulo: los dos triángulos *ABC* y *BCE*, que tienen sus tres lados iguales, son iguales; luego el triángulo *ABC* es mitad del paralelógramo *ACEB*. El área de este paralelógramo es igual al producto de su base por su altura; luego el área del trián-

(*a*) De aquí viene el nombre de *cuadrado* que se da tambien á la segunda potencia de un número; pues dicha segunda potencia es el área de un cuadrado, cuyo lado tiene por valor dicho número

Por una razon semejante se da á veces el nombre de *rectángulo* al producto de dos números.

gulo será igual á la mitad del producto de su base por su altura.

Corolarios. 1.° *Los triángulos de igual base é igual altura son equivalentes;* y por consiguiente los triángulos que tienen una misma base, y cuyos vértices están en una misma paralela á la base, son equivalentes.

2.ª *Todo triángulo es mitad de un paralelógramo de igual base é igual altura.*

3.° *Las áreas de dos triángulos cualesquiera son entre si como los productos de sus bases por sus alturas*; y por consiguiente, si los triángulos tienen bases iguales, sus áreas serán proporcionales á sus alturas; y si tienen iguales alturas, serán entre sí como sus bases.

TEOREMA 95 (*fig.* 131).

El área de un trapecio ABCD *es igual al producto de su altura* EF *por la semi-suma de sus bases* AB *y* DC.

Tiro la diagonal AC, y queda el trapecio dividido en los dos triángulos ABC y ADC, los cuales, considerando como bases suyas á las del trapecio, tienen igual altura EF que este. La área del triángulo ABC es $\frac{1}{2}\,AB \times EF$, y la del triángulo ADC es $\frac{1}{2}DC \times EF$; luego la del trapecio será

$$\tfrac{1}{2}AB \times EF + \tfrac{1}{2}DC \times EF = EF \times (\tfrac{1}{2}AB + \tfrac{1}{2}DC) = EF \times \frac{AB+DC}{2}.$$

Nota. Hemos demostrado [*Teor.* 35] que la recta GH, que une los puntos medios de los lados no paralelos del trapecio, es igual á la semi-suma de las bases; luego *el área del trapecio es* tambien *igual al producto de su altura por la recta que une los puntos medios de los lados no paralelos.*

TEOREMA 96.

El área de un polígono regular es igual á la mitad del producto de la apotema por el perímetro.

En efecto, sean l uno de los lados, a la apotema y n el número de lados; el perímetro será nl. Desde el centro tiremos radios á todos los vértices del polígono, y quedará este descompuesto en tantos triángulos, todos iguales [45, *Nota*], como lados tiene: el área de uno de estos triángulos es $\frac{1}{2}la$; luego el área del polígono será $\frac{1}{2}la \times n = \frac{1}{2}a \times nl$; es decir la mitad de la apotema multiplicada por el perímetro.

Nota. El área de un polígono irregular cualquiera puede hallarse descomponiéndole en triángulos, hallando el área de cada triángulo, y sumando estas áreas.

CAPÍTULO II.

Area del circulo.

TEOREMA 97.

El área de un circulo es igual á la mitad del producto de la circunferencia por el radio.

Sea A el área del circulo, c su circunferencia, y r su radio: digo que $A = \frac{1}{2}cr$.

Sea p el perímetro de un polígono regular inscripto de cualquier número de lados, a su apotema y X su área: tendremos $X = \frac{1}{2}pa$. Ahora bien, el límite del perímetro variable p es la circunferencia c, el de la apotema a es el radio r, y por consiguiente el del producto $\frac{1}{2}pa$ es $\frac{1}{2}cr$. Siendo la circunferencia c el límite del perímetro variable p, es evidente que el área A del circulo es tambien el límite de la área variable X; luego, segun el teorema de los limites, $A = \frac{1}{2}cr$.

Nota. Siendo $c = 2\pi r$, es $A = \pi r^2$; luego el *área de un circulo es igual á la razon de la circunferencia al diámetro multiplicada por el cuadrado del radio.*

La relacion $A = \pi r^2$ nos da A conociendo r, y tambien nos da r conociendo A; pues de ella resulta

$$r^2 = \frac{A}{\pi}, \text{ y por consiguiente } r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}.$$

Tomando los logaritmos de los dos miembros de la ecuacion $A = \pi r^2$, es $\log A = \log \pi + 2 \log r$, ó poniendo en lugar de $\log \pi$ su valor 0,4971499, será

$$\log A = 0{,}4971499 + 2 \log r.$$

Si la incógnita es r, será $\log r = \frac{\log A - 0{,}4971499}{2}$.

49. Se llama *sector* de circulo la porcion de circulo comprendida entre dos radios y el arco.

Asi, la superficie $CADBC$ (*fig.* 115) es un sector, y otro la superficie $AEBCA$.

TEOREMA 98 (*fig.* 132).

El área de un sector de circulo es igual á la mitad del producto de su arco por el radio.

Sea S el área del sector $OACE$, a su arco ACE y r el radio del circulo: digo que $S = \frac{1}{2}ar$.

Dividamos el arco ACE en un número cualquiera n de partes iguales, y tiremos las cuerdas AB, BC, CD, DE de los arcos parciales. Llamemos p á la longitud de la línea quebrada $ABCDE$, d á la perpendicular bajada desde el centro á cualquiera de estas cuerdas, y X á la área del polígono variable $OABCDE$. El área del triángulo AOB es $\frac{1}{2}AB\,.\,d$; luego el área del polígono $OABCDE$, que se compone de n triángulos iguales, será $\frac{1}{2}n\,.\,AB\,.\,d$; y como $n.AB$ es p, tendremos $X=\frac{1}{2}pd$. Ahora, el límite de la línea quebrada $ABCDE$ ó p es el arco a, el de la perpendicular d es el radio r, y por tanto el límite de $\frac{1}{2}pd$ es $\frac{1}{2}ar$. Siendo el arco a el límite de la línea quebrada $ABCDE$, es evidente que el límite del área X del polígono variable $OABCDE$ es el área S del sector $OACE$; y pues las variables X y $\frac{1}{2}pd$ son constantemente iguales, sus límites S y $\frac{1}{2}ar$ tambien son iguales.

Nota. Sea α el número de grados del arco del sector: tenemos que hallar la longitud de este arco. Si 360° tienen de longitud $2\pi r$, 1° tiene de longitud $\frac{2\pi r}{360}=\frac{\pi r}{180}$, y α° tienen de longitud $\frac{\pi r\alpha}{180}$: luego $S=\frac{\pi r^2\alpha}{360}$, ecuacion que sirve para hallar cualquiera de las tres cantidades S, r y α, dadas las otras dos.

Tomando los logaritmos de los dos miembros de esta ecuacion, es

$$\log S = \log\pi - \log 360 + 2\log r + \log\alpha,$$

ó
$$\log S = \bar{3},9408474 + 2\log r + \log\alpha \qquad [A],$$

ecuacion mas adelantada para hallar el valor final de cualquiera de las tres cantidades, que sea la incógnita.

Ejemplos. 1.° Hallar el área de un sector cuyo arco es de 73° y el radio de 25 metros.

Cálculo.

$$\begin{aligned} 2\log 25 &= 2,7958800 \\ \log 73 &= 1,8633229 \\ &\ \bar{3},9408474 \\ \hline \log S &= 2,6000503, \end{aligned}$$

$$S = 398,15 \text{ *metros cuadrados*, ó } S = 398^{m^2} \text{ y } 15^{dm^2}.$$

2.° Siendo el área de un sector 140^{m^2} y el número de grados de su arco 73, ¿cual será el radio del círculo?

La incógnita es el radio: despejando r en la ecuacion [A], será

$$\log r = \frac{\log S + 3 - \log\alpha - 0,9408474}{2}.$$

Cálculo.

$$\begin{array}{rl}
\log 140 = & 2,1461280 \\
 & 3 \\
\hline
 & 5,1461280 \\
\hline
\log\ \ 73 = & 1,8633229 \\
 & 0,9408474 \\
\hline
 & 2,8041703
\end{array}$$

$$\log r = \frac{2,3419577}{2} = 1,1709789;$$

$$r = 14,824 \textit{ metros}, \text{ ó } r = 14^{m}\ 82^{cm}\ 4^{mm}.$$

3.° ¿Cuántos grados ha de tener un arco de un círculo cuyo radio es de 15^{m}, para que el área del sector respectivo sea 140^{m^2}?

La incógnita es α; despejándola en la fórmula $[A]$, será

$$\log \alpha = \log S + 3 - 0,9408474 - 2 \log r.$$

Cálculo.

$$\begin{array}{rl}
\log 140 = & 2,1461280 \\
 & 3 \\
\hline
 & 5,1461280 \\
\hline
 & 0,9408474 \\
2 \log 15 = & 2,3521825 \\
\hline
 & 3,2930299 \\
\hline
\log \alpha = & 1,8530981
\end{array}$$

$$\alpha = 73°,3014, \text{ ó } \alpha = 73°\ 18'\ 5''.$$

50. Se llama *segmento* de círculo cualquiera de las dos porciones del círculo comprendidas entre una cuerda y sus dos arcos correspondientes.

El área de un segmento *ADB* (*fig.* 113), menor que el semicírculo, se hallará restando del área del sector correspondiente *ADBC* la del triángulo *ABC*.

El área de un segmento *AEB*, mayor que el semicírculo, se hallará añadiendo al área del sector *AEBC* la del triángulo *ABC*.

51. Dos superficies planas terminadas por una ó varias líneas curvas son *semejantes*, cuando son límites de dos polígonos semejantes.

De esta definicion, consecuencia natural de la definicion de los polígonos semejantes, resultan los teoremas siguientes:

1.° *Dos círculos son semejantes;* pues son límites de dos polígonos regulares de igual número de lados, los cuales polígonos son semejantes [*Teor.* 85].

2.° *Dos sectores circulares* OACE *y* Oace (fig. 133, sin las rectas AE y ae), *correspondientes á dos círculos desiguales, son semejantes, cuando sus ángulos* AOE *y* aOe *son iguales.*

Coloquemos los sectores de modo que coincidan sus ángulos iguales, tiremos un radio que forme dos ángulos iguales con los dos radios OA y OE, y dividamos en seguida los ángulos iguales AOC y COE en 2, 4, 6, 8,... partes iguales, y tiremos las cuerdas de los arcos parciales: siendo iguales los radios AO y BO, aO y bO, las dos razones $\frac{AO}{BO}$ y $\frac{aO}{bO}$ son iguales; luego los triángulos AOB y aOb, que tienen dos lados proporcionales é igual el ángulo comprendido, son semejantes. Por la misma razon los triángulos BOC y bOc, COD y cOd, etc. son semejantes; luego los dos polígonos $OABCDE$ y $Oabcde$ son semejantes; y por tanto [*Teor.* 65] los sectores, que son límites de estos polígonos, son tambien semejantes.

3.ª *Dos segmentos circulares* ACEA *y* acea (*fig.* 133), *correspondientes á dos círculos desiguales, son semejantes, cuando los ángulos respectivos* AOE *y* aOe *son iguales.*

Hagamos la misma construccion que en el teorema anterior. Dividiendo la recta ab á los lados AO y BO en partes proporcionales, es paralela al lado AB; y por la misma razon los otros lados de los dos polígonos $ABCDE$ y $abcde$ son respectivamente paralelos, y tienen dos á dos el mismo sentido: luego estos polígonos tienen iguales los ángulos colocados en el mismo órden. La razon de cada dos lados paralelos de estos polígonos es evidentemente la misma que la de los radios de los arcos ACE y ace; luego dichos polígonos son semejantes [41]: luego los segmentos $ACEA$ y $acea$, límites de los mismos polígonos, son tambien semejantes.

52. Circunferencias *concéntricas* son las circunferencias que tienen un mismo centro. *Corona* es la porcion de plano comprendida entre dos circunferencias concéntricas. Es claro que el área de una corona es la diferencia de las áreas de los dos círculos concéntricos.

Algunos autores llaman *trapecio circular* á la diferencia de dos sectores correspondientes á un mismo ángulo: por lo tanto la área de esta porcion de plano es la diferencia de las áreas de dichos dos sectores.

CAPITULO III.

Comparacion de las áreas.

TEOREMA 99 (*fig.* 134).

La razon de las áreas S *y* S' *de dos triángulos* ABC *y* ADE *que tienen un ángulo comun* A, *es igual á la de los productos* AB × AC, AD × AE *de los lados que forman dicho ángulo.*

Tiro la recta *EB*, y sea *S''* la área del triángulo auxiliar *ABE*: la razon de las áreas *S* y *S''* de los dos triángulos *ABC* y *ABE*, que tienen sus bases *AC* y *AE* en una misma recta, y un mismo vértice *B*, y por consiguiente igual altura, es la de sus bases [*Teor.* 94, *Corol.* 3.°], esto es

$$S : S'' : : AC : AE.$$

La razon de las áreas *S''* y *S'* de los triángulos *ABE* y *ADE* que tienen sus bases *AB* y *AD* en línea recta, y un mismo vértice *E*, y por tanto igual altura, es la de sus bases, es decir

$$S'' : S' : : AB : AD.$$

Multiplicando estas dos proporciones ordenadamente, y suprimiendo el factor *S''* comun á los dos términos de la primera razon, resulta

$$S : S' : : AC \times AB : AE \times AD.$$

TEOREMA 100 (*figs.* 98 1.ª *y* 94).

La razon de las áreas de dos polígonos semejantes es igual á la razon de los cuadrados de sus lados homólogos, ó al cuadrado de la razon de sus lados homólogos.

Consideremos en primer lugar dos triángulos semejantes *ABC* y *abc* (*fig.* 98 1.ª). Tenemos, por ser semejantes los triángulos propuestos, $CD : cd : : AB : ab,$

y evidentemente $\frac{1}{2}AB : \frac{1}{2}ab : : AB : ab.$

Multiplicando ordenadamente estas dos proporciones, resulta

$$\tfrac{1}{2}AB \times CD : \tfrac{1}{2}ab \times cd : : AB^2 : ab^2;$$

y como la razon $AB^2 : ab^2$ es igual á las razones $AC^2 : ac^2$ y $BC^2 : bc^2$, queda demostrado el teorema.

Consideremos ahora dos polígonos semejantes *ABCDEF*, *abcdef* (*fig.* 94), en los que son respectivamente iguales los ángulos colocados en el mismo órden, *A* y *a*, *B* y *b*, *C* y *c*, etc. Desde los vértices de dos de estos ángulos iguales, *A* y *a* por ejemplo, tiremos diagonales á los vértices de todos los demás; los triángulos *ABC* y *abc*, *ACD* y *acd*, etc. serán respectivamente semejantes [*Teor.* 65, *Recip.*].

Sean *T*, *T'*, *T''* y *T'''* las áreas de los triángulos *ABC*, *ACD*, *ADE* y *AEF*, t, t', t'' y t''' las de los triángulos *abc*, *acd*, *ade* y *aef*; y sea q la razon de los lados homólogos de ambos polígonos. Segun acabamos de demostrar, tenemos

$$\frac{T}{t}=q^2,\ \frac{T'}{t'}=q^2,\ \frac{T''}{t''}=q^2,\ \frac{T'''}{t'''}=q^2;$$

luego son iguales todas las razones $\frac{T}{t}$, $\frac{T'}{t'}$, $\frac{T''}{t''}$, $\frac{T'''}{t'''}$. Por consiguiente [*Aritm.* 174]

$$\frac{T+T'+T''+T'''}{t+t'+t''+t'''}=\frac{T}{t}=q^2;$$

y como q^2 es la razon de los cuadrados de los lados homólogos de los dos polígonos, ó el cuadrado de la razon de los lados homólogos, queda demostrado el teorema.

Nota. Segun este teorema, si los lados de un polígono son duplos de los homólogos de otro polígono semejante, la razon de la área del primero á la del segundo será 4, es decir, que el área del primer polígono será cuádrupla del área del segundo. Si la razon de los lados homólogos es 3, el área del polígono mayor será 9 veces mayor que la del menor. Si la razon de los lados homólogos es $\frac{5}{7}$, la razon de las áreas de los dos polígonos semejantes será $\left(\frac{5}{7}\right)^2=\frac{25}{49}$, es decir que la área del primer polígono es $\frac{25}{49}$ de la área del segundo.

Corolario. *La razon de las áreas de dos polígonos regulares semejantes* ABCDE, abcde (fig. 116) *es la de los cuadrados de sus radios y la de los cuadrados de sus apotemas.*

Acabamos de demostrar que la razon de las áreas de dos polígonos semejantes es la de los cuadrados de sus lados homólogos; pero, siendo semejantes los triángulos *ABO* y *abo*, la razon de los lados homólogos *AB* y *ab* es la misma que la de los radios *AO* y *ao*, y que la de las apotemas *OF* y *of*; luego la razon de las áreas de los dos polígonos regulares semejantes es la de los cuadrados de sus radios, y tambien la de los cuadrados de sus apotemas.

TEOREMA 101.

La razon de las áreas de dos círculos es la de los cuadrados de sus radios; pues, si R y r son los radios, πR^2 y πr^2 son las áreas de los círculos, y es evidente que la razon de πR^2 á πr^2 es $\frac{R^2}{r^2}$.

TEOREMA 102.

La razon de las áreas de dos sectores circulares OACE *y* Oace (fig. 133, sin las líneas *OB, OC, OD, ab, bc, cd, de, ae, AB, BC, CD, DE, AE*) *semejantes es la de los cuadrados de sus radios.*

Siendo AOE y aOe dos ángulos iguales, sus arcos AE y ae tienen igual número de grados α; las áreas de los dos sectores $OACE$ y $Oace$ son $\frac{\pi R^2\alpha}{360}$ y $\frac{\pi r^2\alpha}{360}$, siendo R y r los radios; y la razon de estas dos cantidades es la misma que la de R^2 á r^2.

TEOREMA 103.

La razon de las áreas de dos segmentos circulares semejantes ACEA *y* acea (fig. 133, sin las líneas *OB, OC, OD, ab, bc, cd, de, AB, BC, CD, DE*) *es la de los cuadrados de sus radios.*

Sean S y s las áreas de los dos sectores semejantes $OACE$ y $Oace$, T y t las de los triángulos semejantes AOE y aOe: tendremos

$$\frac{S}{R^2}=\frac{s}{r^2},\ \frac{T}{R^2}=\frac{t}{r^2};$$

luego
$$\frac{S-T}{R^2}=\frac{s-t}{r^2},$$

y pues $S-T$ y $s-t$ son las áreas de los dos segmentos semejantes, queda demostrado el teorema.

TEOREMA 104.

Si considerando como homólogos los tres lados de un triángulo rectángulo, se construyen tres polígonos semejantes, el polígono construido sobre la hipotenusa será equivalente á la suma de los polígonos construidos sobre los catetos.

Sean a, b y c la hipotenusa y catetos de un triángulo rectángulo, A, B y C las áreas de los tres polígonos semejantes construidos sobre ellos: digo que $A=B+C$.

En efecto, siendo semejantes los tres polígonos, tenemos

[*Teor.* 100]
$$\frac{B}{A}=\frac{b^2}{a^2},\ \frac{C}{A}=\frac{c^2}{a^2};$$

luego
$$\frac{B+C}{A}=\frac{b^2+c^2}{a^2}:$$

pero, segun el teorema de Pitágoras, $a^2=b^2+c^2$; luego

$$A=B+C.$$

Corolario. *Si considerando como homólogos los tres lados de* *un triángulo rectángulo, se construyen tres polígonos semejantes, el polígono construido sobre un cateto será equivalente á la diferencia de los polígonos construidos sobre la hipotenusa y el otro cateto.*

PROBLEMA 105.

Si considerando como radios ó como diámetros los tres lados de un triángulo rectángulo, se construyen tres círculos, el construido sobre la hipotenusa es equivalente á la suma de los construidos sobre los catetos; y el construido sobre un cateto es equivalente á la diferencia de los círculos construidos sobre la hipotenusa y el otro cateto.

Se demuestra del mismo modo que el teorema anterior (*a*).

* TEOREMA 106 (*fig.* 136).

El cuadrado construido sobre la suma de dos rectas es equivalente á la suma de cuadrados construidos sobre las dos, mas el duplo del rectángulo construido sobre las mismas.

Sobre la AC, suma de las rectas AB y BC, construyo un cuadrado $ACDE$, tomo $AF = AB$, y por los puntos B y F tiro las BG y FH perpendiculares á los lados AC y AE. La figura $ABIF$ es un cuadrado. Tambien la figura $IGDH$ es otro cuadrado; pues siendo $BG = FH$, $BI = FI$, resulta $GI = IH$. Este cuadrado es igual al construido sobre la recta BC. Ahora bien,

$$ACDE = ABIF + IGDH + BIHC + EGIF:$$

los dos rectángulos $BIHC$, $EGIF$ son iguales por tener bases iguales BI, FI, é iguales alturas IH, IG: luego

$$ACDE = ABIF + IGDH + 2BIHC,$$

que es el enunciado del teorema.

* TEOREMA 107 (*fig.* 137).

El cuadrado construido sobre la diferencia de dos rectas es equivalente á la suma de cuadrados construidos sobre las dos, menos el duplo del rectángulo construido sobre las mismas.

Sobre la recta AB, diferencia de las dos rectas AC y BC, construyo el cuadrado $ABGF$, sobre la recta AC construyo el cuadrado $ACDE$, y sobre la BC el cuadrado $BCIH$; y prolongo la FG hasta que encuentre en K al lado DC.

(*a*) Es muy curioso el siguiente corolario de este teorema.
Si tomando por diámetros los tres lados de un triángulo rectángulo isósceles ABC (fig. 135), *se describen sobre ellos tres semicírculos* ABC, ADB *y* BGC, *el área de cada una de las figuras* ADBEA *y* BGCFB (que se llaman *lúnulas* de Hipócrates) *es igual á la mitad del área del triángulo* ABC.

El rectángulo $FEDK$ tiene por base $FK = AC$, y por altura $EF = BC$. El rectángulo $HGKI$ tiene por base $GH = AC$, y por altura $GK = BC$; luego estos dos rectángulos son iguales al construido sobre las dos rectas AC y BC. Ahora,

$$ABGF = ACDE + BCIH - EFKD - GKIH,$$

ó
$$ABGF = ACDE + BCIH - 2EFKD.$$

*TEOREMA 108 (*fig.* 138).

El rectángulo construido sobre la suma y diferencia de dos rectas es equivalente á la diferencia de los cuadrados construidos sobre dichas dos rectas.

Sean AE, ED las dos rectas, y AD la suma de los dos: levanto las tres perpendiculares AB, ED y $DI = AE$; tomo $IG = ED$, y tiro las IB, GH perpendiculares á la DI: el rectángulo $AHGD$ tiene por base la AD y por altura la $DG = DI - IG = AE - ED$, es decir que este rectángulo es el construido sobre la suma y diferencia de las dos rectas. El cuadrado $ABCE$ es el construido sobre la recta mayor AE, y el $CIGF$ el construido sobre la menor ED.

Esto supuesto, tenemos $AHGD = AHFE + FGDE$; y como $EDGF = EDIC - FGIC$, será $AHGD = AHFE + EDIC - FGIC$: el rectángulo $EDIC$ es igual al rectángulo $HBCF$, pues sus alturas EC y BC son iguales, como tambien sus bases ED y BH; luego

$$AHGD = AHFE + HBCF - FGIC = ABCE - FGIC,$$

que es la diferencia de los cuadrados construidos sobre las dos rectas.

* TEOREMA 109 (*fig.* 139).

El cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equivalente á la suma de cuadrados construidos sobre los catetos (a).

Sea ACB el triángulo rectángulo en C: construyo sobre sus tres lados tres cuadrados AG, AI, BK, y digo que el AG es equivalente á la suma $AI + BK$ de los otros dos.

Desde el vértice del ángulo recto bajo la perpendicular CD á la hipotenusa, y la prolongo hasta que encuentre en E al lado FG; y tiro las rectas FM y HN paralelas á las AC y AB.

Los paralelógramos $CAFM$ y $BAHN$ son iguales, pues los lados CA y AF del primero son iguales á los AH y AB del segundo, y los ángulos comprendidos CAF y BAH son iguales, por estar ambos compuestos de un ángulo recto y del ángulo BAC. El paralelógramo $BAHN$ es equivalente al cuadrado $ACIH$, por tener los dos la misma base AH é igual altura. El paralelógramo $CAFM$

(a) Este teorema está incluido como caso particular en el 104.

es tambien equivalente al rectángulo *ADEF*, por tener los dos la misma base *AF* é igual altura: y pues los dos paralelógramos *BAHN* y *CAFM* son iguales, el cuadrado *ACIH* y el rectángulo *AFED* son equivalentes. Del mismo modo se demuestra que el cuadrado *BCKL* es equivalente al rectángulo *BDEG*. Luego el cuadrado *ABGF* es equivalente á la suma de los cuadrados *ACIH* y *BCKL*.

NOTA. El producto de las longitudes ó valores numéricos de dos rectas representa el área del rectángulo construido sobre estas rectas; y la segunda potencia de la longitud de una recta es el área del cuadrado construido sobre ella. Por consiguiente todos los teoremas, en que entran productos ó segundas potencias de rectas, pueden enunciarse, reemplazando dichos productos ó segundas potencias por rectángulos ó cuadrados construidos sobre dichas rectas. Asi, el teorema último es el Pitágoras, en el cual se han reemplazado las segundas potencias de los tres lados por los cuadrados construidos sobre ellas.

Al contrario, todo teorema, en que entren rectángulos y cuadrados, se podrá enunciar, reemplazando cada rectángulo por el producto de los números que representen á su base y altura, y cada cuadrado por la segunda potencia del número que represente á su lado.

Asi, los teoremas 106, 107 y 108 podrán enunciarse repectivamente como sigue.

La segunda potencia de la suma de dos números es igual á la suma de las segundas potencias de dichos números, mas el duplo del producto de los mismos números: es decir, que si a y b son dos números, tendremos

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

La segunda potencia de la diferencia de dos números es igual á la suma de las segundas potencias de dichos números, menos el duplo del producto de los mismos números: es decir, que si a y b son dos números, tendremos

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$$

La suma de dos números multiplicada por su diferancia es igual al cuadrado del mayor menos el cuadrado del menor: es decir, que si a es el número mayor y b es el menor, será

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \text{ (a)}.$$

(a) Obsérvese que la demostracion geométrica de estos teoremas comprende á toda clase de números conmensurables é inconmensurables, mientras que el razonamiento con que la mayor parte de los autores pretenden probar dichos teoremas en el Algebra, supone que los números son conmensurables, y aun números enteros.

PROBLEMAS

RELATIVOS AL LIBRO QUINTO.

PROBLEMA 41 (*fig.* 140).

Reducir un polígono ABCDE *á otro equivalente que tenga un lado menos.*

Por los estremos B y D de dos lados adyacentes BC y CD del polígono tiro la diagonal BD, la cual formará con dichos dos lados un triángulo; por el vértice C opuesto á la BD tiro una paralela CF á esta recta, y la prolongo hasta que encuentre en F al lado AB prolongado; junto el punto F con el D, y el polígono $AFDE$, que tiene un lado menos que el propuesto, será equivalente á este.

En efecto, los triángulos BCD y BFD son equivalentes [*Teorema* 94, *Corol.* 1.º]; luego si á cada uno se añade el polígono $ABDE$, resulta que el polígono $ABCDE$ es equivalente al $AFDE$.

PROBLEMA 42.

Reducir un polígono á triángulo equivalente.

Redúzcase el polígono á otro equivalente que tenga un lado menos, este á otro equivalente que tengo un lado menos, y asi sucesivamente, hasta que se encuentre un triángulo, el cual será equivalente al polígono dado.

PROBLEMA 43.

Reducir un triángulo á cuadrado equivalente.

Hállese una media proporcional entre la mitad de la base y la altura, y el cuadrado construido sobre dicha media proporcional será equivalente al triángulo dado.

En efecto, si b y a son la base y altura de un triángulo, y m la media proporcional, será $\frac{1}{2}ab = m^2$. El primer miembro de esta igualdad representa el área del triángulo, y el segundo la del cuadrado construido sobre la media proporcional; luego este cuadrado es equivalente al triángulo.

PROBLEMA 44.

Reducir un paralelógramo á cuadrado equivalente.

Hállese una media proporcional entre la base y la altura de dicho paralelógramo; y el cuadrado construido sobre dicha media proporcional será equivalente al paralelógramo.

Se demuestra como la solucion anterior.

PROBLEMA 45.

Reducir un polígono cualquiera á cuadrado equivalente.
Redúzcase á triángulo equivalente, y este á cuadrado.

PROBLEMA 46.

Reducir un círculo á cuadrado equivalente.
Hállese una media proporcional entre la mitad del radio y la circunferencia, y el cuadrado construido sobre ella será equivalente al círculo.

Se demostrará esta solucion como la del problema 43.

NOTA. Para poder resolver con exactitud este problema, que es el de la *cuadratura del círculo*, seria menester poder construir con la regla y el compás una recta exactamente igual á la circunferencia rectificada. Esto no se ha conseguido todavia, y muy probablemente no se conseguirá nunca.

PROBLEMA 47 (*fig.* 141).

Dado un polígono construir otro semejante con el cual esté el primero en la razon de m *á* n.

Divídase una recta AB en dos partes AC y CB, que estén en la razon de m á n; sobre la AB como diámetro descríbase un semicírculo, levántese la perpendicular CD á la AB, tírense las cuerdas AD y BD, tómese sobre la AD, prolongada si es preciso, una parte DE igual á un lado del polígono dado, por el punto E tírese la EF paralela á la AB: la DF será el lado homólogo de DE en el polígono que se quiere construir.

En efecto, sea P el polígono dado, X el polígono semejante al P construido sobre la DF considerada como lado homólogo del DE: la razon de los dos polígonos P y X será [*Teor.* 100] la misma que la de DE^2 á DF^2. Siendo semejantes los triángulos ABD y EFD, la razon de DE á DF es igual á la de DA á DB, y por tanto la razon de DE^2 á DF^2 es igual á la razon de DA^2 á DB^2, y esta es igual á la de m á n [*Teor.* 70, *Corol.* 2.°]; luego la razon de los dos polígonos P y X es la de m á n; luego X es el polígono pedido.

Solucion analítica. Sea P el área del polígono dado, X la del que se quiere construir, a uno de los lados del polígono dado, y x su lado homólogo en el polígono que se pide: tendremos [*Teorema* 100]

$$P : X : : a^2 : x^2;$$

pero por suposicion $P : X : : m : n,$

luego $a^2 : x^2 : : m : n,$

de donde $x^2 = \frac{na^2}{m}$, ó bien $x^2 = \frac{n}{m}a \, . \, a$; luego x es una media proporcional entre las rectas $\frac{n}{m}a$ y a, la cual puede obtenerse en todos casos por la construccion hecha en la solucion sintética.

Casos particulares. *Construir un polígono semejante á uno dado, y que sea duplo, triplo, cuádruplo, etc. del polígono dado.*

1.° Si el nuevo polígono ha de ser duplo del polígono dado, será $\frac{n}{m} = 2$; luego $x^2 = 2a^2$, ó $\frac{x}{a} = \sqrt{2}$; es decir, que [*Teorema* 81] x es la diagonal de un cuadrado cuyo lado es a; ó bien x es el lado del cuadrado inscripto en un círculo cuyo radio es a.

2.° Si el nuevo polígono ha de ser triplo del polígono dado, será $\frac{n}{m} = 3$; y $x^2 = 3a^2$, ó $\frac{x}{a} = \sqrt{3}$; luego [*Teor.* 83] x es el lado del triángulo equilátero inscripto en un círculo cuyo radio es a.

3.° Si el nuevo polígono ha de ser cuádruplo del polígono dado, será $\frac{n}{m} = 4$; y por consiguiente $x^2 = 4a^2$, ó $x = 2a$; luego el lado del nuevo polígono ha de ser doble de su homólogo en el polígono dado.

Ya se ve que las construcciones en estos casos particulares son mas sencillas que las que habria que hacer siguiendo el método general.

GEOMETRIA DEL ESPACIO.

LIBRO PRIMERO.

PLANOS, ANGULOS DIEDROS Y ANGULOS POLIEDROS.

CAPÍTULO I.

Perpendiculares y oblicuas á un plano.

53. Una *recta que tiene dos puntos en un plano, está toda ella en el plano*: pues hemos dicho [*Pág.* 2] que se llama plano una superficie tal, que si una recta pasa por dos puntos tomados á arbitrio en dicha superficie, coincide enteramente con la misma superficie.

TEOREMA 110 (*fig.* 142).

Tres puntos A, B *y* C, *que no están en linea recta, determinan la posicion de un plano;* ó lo que es igual, *por tres puntos* A, B *y* C, *que no están en linea recta, puede pasar un plano, y no puede pasar mas que un solo plano.*

Tiremos la recta *AB*: es evidente que por esta recta *AB* podrá pasar un plano, y que si este plano gira al rededor de la recta *AB*, llegará á pasar por el tercer punto *C*. Luego por tres puntos que no están en línea recta, puede pasar un plano.

Para demostrar que por dichos tres puntos no puede pasar mas que un solo plano, concibamos que por estos puntos pasen dos planos. Tiremos las rectas *AB* y *AC*: estas rectas estarán enteramente en los dos planos, porque cada una tiene dos puntos en ellos. Tomemos ahora un punto cualquiera *D* en uno de los planos, y tiremos en este plano la recta *DEF*, de modo que corte á las dos rectas *AB* y *AC*; lo que es posible, por hallarse las rectas *AB* y *AC* en los dos planos. Los puntos *E* y *F* están en los dos planos; luego la recta *DEF* estará enteramente en los dos planos, y por tanto el punto *D* se halla en los dos planos. Queda pues demostrado que todo punto de uno de los planos es tambien punto del otro plano; luego ambos planos tienen todos sus puntos comunes; luego forman un solo plano.

Corolarios. 1.° *Dos rectas que se cortan, determinan la posicion de un plano*: pues señalando en cada una un punto diferente del punto comun, tendremos tres puntos que no están en línea recta; por estos tres puntos puede pasar un plano, el cual contiene á las dos rectas. Otro plano que pase por estas dos rectas contendrá á dichos tres puntos, y por consiguiente coincidirá con el primero.

2.° *Dos rectas paralelas determinan la posicion de un plano.* En efecto, segun la definicion de paralelas, estas dos rectas están en un mismo plano. Si otro plano pasa por las mismas paralelas, señalando dos puntos en la una y un punto en la otra, los dos planos tendrán tres puntos comunes, y por tanto coincidirán.

3.° *La interseccion de dos planos es una recta:* pues si no fuese recta, se podrian tomar en ella tres puntos no en línea recta, por los cuales pasaran los dos planos, y por tanto estos planos coincidirian; contra lo supuesto.

TEOREMA 111 (*fig.* 143).

Si una recta AB *recorre otra recta fija* MR, *conservándose en su movimiento paralela á su posicion primitiva, dicha recta móvil engendra un plano.*

En efecto, el plano *ABKI*, determinado por las dos paralelas estremas *AB* é *IK*, y el plano *ABEF* determinado por la recta *AB* y por cualquiera *EF* de sus posiciones intermedias, tienen comunes las dos rectas *AB* y *MR*; luego ambos planos coinciden: luego todas las rectas *AB*, *CD*, *EF*, *FG*, *IK* están en el plano *ABIK*; y asi queda demostrado que la recta *AB*, recorriendo la *MR*, y conservándose siempre paralela á su posicion primitiva, engendra un plano.

TEOREMA 112 (*fig.* 144) (*a*).

Si una recta AB *es perpendicular á otras dos rectas* AC *y* AD *que pasan por su pié* A *en un plano* MN, *es perpendicular á otra cualquiera recta* AE *que pasa por su pie en el mismo plano.*

Tiro una recta *DC* que corte á las tres rectas *AC*, *AD* y *AE*, prolongo la *AB* hácia el otro lado del plano *MN*, tomo en su prolongacion la parte $AB' = AB$, y tiro las rectas *BC*, *BE*, *BD*, *B'C*, *B'E* y *B'D*.

Las rectas *BC* y *B'C* son iguales, por ser oblicuas que se

(*a*) En la Geometría del espacio se señalan las líneas invisibles por líneas formadas de puntos muy finos.

apartan igualmente de la perpendicular *CA*, y por la misma razon las rectas *BD* y *B'D* son iguales: luego los triángulos *BCD* y *B'CD* son iguales, y por consiguiente los ángulos *BCE* y *B'CE* son iguales. Los triángulos *BEC* y *B'EC* son iguales; luego *BE*= *B'E:* luego la recta *EA*, que tiene los puntos *E* y *A* equidistantes de los puntos *B* y *B'*, es perpendicular á la *BB'*.

TEOREMA 113 (*fig.* 144, *sin las lineas auxiliares*).

Todas las perpendiculares AC, AD, AE, etc., *levantadas á una recta en uno de sus puntos* A, *están en un mismo plano.*

Obsérvese en primer lugar que estas perpendiculares están levantadas en los diferentes planos *BAC, BAD*, *BAE*, etc., y no en un solo plano que pase por la *AB;* pues [*Teor.* 1] en un solo plano y por un punto dado en una recta no se puede levantar mas que una sola perpendicular á dicha recta. Esto supuesto, por dos de estas rectas, por ejemplo por las *AC* y *AD,* hagamos pasar un plano: otra cualquiera de las perpendiculares, *AE* por ejemplo, estará en este plano; pues haciendo pasar por las dos rectas *AB* y *AE* un plano, este cortará al plano *MN* por una recta perpendicular á la *AB,* por ser esta *AB* perpendicular á las dos rectas *AC* y *AD* de dicho plano; y como por un punto *A* no se puede levantar mas que una perpendicular á una recta en un mismo plano *BAE,* se infiere que la recta *AE* coincide con dicha interseccion; luego la *AE* está en el plano *MN*.

54. Se dice que una recta *es perpendicular* á un plano, ó que un plano es *perpendicular* á una recta, cuando la recta es perpendicular á todas las que pasan por su pie en dicho plano.

Segun esta definicion, una recta será perpendicular á un plano, si es perpendicular á dos rectas que pasan por su pie en dicho plano [*Teor.* 112].

Una recta que no es perpendicular á un plano, se llama *oblícua* al plano.

TEOREMA 114 (*fig.* 145).

Por un punto A *de un plano no se puede levantar mas que una sola perpendicular* AB *á dicho plano;* pues si por dicho punto *A* se tira otra recta *AC* fuera del plano, y por las dos un plano, su interseccion con el *MN* será la *DE.* Siendo la *AB* perpendicular al plano *MN,* es perpendicular á la recta *DE* que pasa por su pie en dicho plano *MN;* luego la *AC* se oblícua á la *DE,* y por lo tanto es oblícua al plano *MN*.

TEOREMA 115 (*fig.* 146).

Desde un punto B, *dado fuera de un plano* MN, *no se puede* *bajar al plano mas que una sola perpendicular* BA: pues tirando desde el punto *B* otra recta cualquiera *BC* hasta el plano *MN*, y juntando los pies *A* y *C*, la recta *BA* será perpendicular á la *AC*, porque lo es al plano *MN*: por consiguiente la *BC* es oblícua á la *AC*, y por lo tanto es oblícua al plano.

TEOREMA 116 (*fig.* 147).

Por un punto dado A *de una recta* AB *no se puede tirar mas que un plano* CDE *perpendicular á dicha recta.*

Tiro otro plano cualquiera *CDF* por dicho punto *A*, y hago pasar por la recta *AB* un plano que corte á los dos *CDE* y *CDF*, y sean *AG* y *AH* sus intersecciones con estos dos planos: la *AB* será perpendicular á la *AG*, porque lo es al plano *CDE*; luego la *AB* será oblícua á la *AH*, y por consiguiente oblícua al plano *CDF*.

TEOREMA 117 (*fig.* 148).

Desde un punto B, *dado fuera de una recta* MN, *no se puede tirar mas que un solo plano* BD *perpendicular á dicha recta* MN.

Tiro otro plano cualquiera *BE* que corte á la recta *MN*, y desde un punto *B* de la interseccion de los planos tiro las dos rectas *BA* y *BC* á los puntos de interseccion de los planos con la recta *MN*. Siendo el plano *BD* perpendicular á la recta *MN*, esta es perpendicular á la recta *AB* que pasa por su pie en el plano *BD*; luego la recta *MN* es oblícua á la *BC*, y por consiguiente es oblícua al plano *BE*.

TEOREMA 118 (*fig.* 149, *sin las lineas* BE, BC *y* AE).

La perpendicular BA, *bajada á un plano* MN *desde un punto* B *esterior á él, es menor que cualquiera oblicua* BD *tirada desde dicho punto al plano:* pues tirada la *AD*, la *BA* es perpendicular á la *AD*, y por consiguiente la *BD* es oblícua; y ya se sabe que $BA < BD$.

Recíproco. *La recta mas corta que se puede tirar desde un punto á un plano, es perpendicular al plano* [40].

55. Se llama *distancia* de un punto á un plano la perpendicular bajada desde dicho punto al plano.

TEOREMA 119 (*fig.* 149).

Si desde un punto tomado fuera de un plano se tiran una perpendicular y varias oblícuas: 1.° *Las oblicuas que se apartan igualmente de la perpendicular, son iguales.* 2.° *De dos oblicuas, la que se aparta mas de la perpendicular, es mayor.*

1.° Sean las oblícuas *BC* y *BD*, y sea $AC = AD$: digo que $BC = BD$.

Los triángulos ABC y ABD son iguales; luego $BC = BD$.

2.° Sean las dos oblícuas BD y BE, y sea $AE > AD$: digo que $BE > BD$.

Tomo $AC = AD$, y tiro la BC, que será igual á la BD [1.°]; y como $BE > BC$, será $BE > BD$.

Recíproco. 1.° *Las oblicuas iguales se apartan igualmente de la perpendicular á un plano.*

2.° *La mayor de dos oblícuas se aparta de la perpendicular á un plano mas que la menor* [20].

TEOREMA 120 (*fig.* 150).

Si desde el pié de una perpendicular BA *á un plano* MN *se tira una perpendicular* AC *á una recta* DE *situada en el plano, la recta* CB *tirada desde el pie* C *de esta segunda perpendicular á un punto* B *de la primera será perpendicular á la recta* DE *situada en el plano.*

Tomo sobre la DE las partes iguales CD y CE, y tiro las rectas DA y EA, DB y EB: tendremos $AD = AE$, por ser oblícuas que se apartan igualmente de la perpendicular AC á la DE, y $DB = EB$, por ser oblícuas que se apartan igualmente de la perpendicular BA al plano; luego la recta BC, que tiene los puntos B y C equidistantes de los D y E, es perpendicular á la DE [*Teor.* 24].

CAPÍTULO II.

Paralelismo en el espacio.

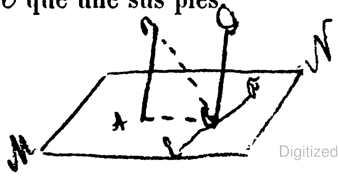
TEOREMA 121 (*fig.* 151).

Por un punto G *del espacio no se puede tirar mas que una sola paralela* BA *á una recta* CD: pues otra recta cualquiera EF, que pase por dicho punto G, y la CD estarán ó no en un mismo plano: si están en un mismo plano, este y el $ABCD$ tienen comunes los tres puntos G, C y D, y por lo tanto coinciden; hallándose segun esto, la recta EF en el plano $ABCD$, no es paralela á la CD [17]. Si las dos rectas EF y CD no están en un mismo plano, tampoco son paralelas, pues dos paralelas están en un mismo plano.

TEOREMA 122 (*fig.* 152).

Dos rectas AB *y* CD *perpendiculares á un plano* MN *son paralelas.*

Las rectas AB y CD no pueden encontrarse, pues son perpendiculares á la recta AC que une sus pies.



Falta ahora demostrar que estas dos rectas *AB* y *CD* están en el mismo plano (*a*).

Para esto, tiro por el punto *C* la *EF* perpendicular á la *AC* en el plano *MN*, y junto el punto *C* con el punto *B*: la *BC* será [*Teor.* 120] perpendicular á la *EF*. Pero por ser la *DC* perpendicular al plano, es perpendicular á la recta *EF*; luego las rectas *CA*, *CB* y *CD* son perpendiculares á la recta *EF*; luego [*Teorema* 113] estas tres rectas están en un mismo plano: y como la *BA* tiene dos puntos *B* y *A* en este plano, se hallará toda en él; las rectas *AB* y *CD* están pues en un mismo plano. Las rectas *AB* y *CD* que no se encuentran, y están en un mismo plano, son paralelas.

Recíproco. *Si dos rectas son paralelas y una de ellas es perpendicular á un plano, la otra tambien lo será.*

Aplíquese á la demostracion de este recíproco el método espuesto en el número 40.

TEOREMA 123 (*fig.* 153).

Dos rectas AB *y* CD, *paralelas á una tercera* EF *en el espacio, son paralelas entre si:* pues tirando un plano *MN* perpendicular á la *AB*, lo será á su paralela *EF*; y siendo perpendicular á la *EF*, será perpendicular á su paralela *CD*: luego las dos rectas *AB* y *CD* son perpendiculares al plano *MN*; y por tanto son paralelas.

56. Se dice que una recta es *paralela* á un plano ó que un plano es *paralelo* á una recta, cuando, prolongados indefinidamente la recta y el plano, no se encuentran.

TEOREMA 124 (*fig.* 154).

Si una recta AB, *situada fuera de un plano* MN, *es paralela á otra* CD *situada en él, es paralela á dicho plano* MN.

La recta *AB* se halla en el plano *ABCD*; este plano no tiene con el plano *MN* mas puntos comunes que los de la recta *CD*; y como la recta *AB* no puede encontrar á la *CD*, pues las dos son paralelas segun la hipótesi, se infiere que la *AB* no puede encontrar al plano *MN*.

TEOREMA 125 (*fig.* 154).

Si una recta AB *es paralela á un plano* MN, *y por un punto* C *de este plano se tira una paralela* CD *á dicha recta* AB, *la paralela* CD *estará contenida en el mismo plano* MN.

En efecto, tiremos el plano *ABCD*, el cual cortará al *MN* por una recta paralela á la *AB*, pues dicha interseccion y la *AB* para-

(*a*) Dos rectas pueden no encontrarse en el espacio, y no ser paralelas, por no hallarse en el mismo plano. Asi, para poder asegurar que dos rectas son paralelas, se ha de demostrar que no se encuentran, y que además estan en un mismo plano.

lela al plano *MN*, no pueden encontrarse, y están en el mismo plano *ABCD*; y como por un punto *C* no pueden pasar dos paralelas á la *AB*, se infiere que la interseccion coincide con la *CD*: luego la *CD* se halla en el plano *MN*.

TEOREMA 126 (*fig.* 155).

Si una recta AB *es paralela á dos planos* MP *y* MQ *que se cortan, es paralela á su interseccion* MN: pues si por el punto *M* de la interseccion *MN* tiramos una paralela á la recta *AB*, estará contenida, segun el teorema anterior, en el plano *MP* y en el plano *MQ*; luego coincidirá con la interseccion: luego la recta *AB* es paralela á la interseccion *MN*.

57. Dos planos que por mas que se prolonguen, no se encuentran, se llaman *paralelos*.

TEOREMA 127 (*fig.* 156).

Dos planos MN *y* PQ *perpendiculares á una recta* AB *son paralelos:* pues si dichos planos se encontrasen, tirando desde un punto *C* de su interseccion las rectas *AC* y *BC*, la recta *AC* estaria en el plano *MN*, por tener dos puntos *A* y *C* en dicho plano, y por la misma razon la recta *BC* estaria en el plano *PQ*. La recta *AB* seria perpendicular á las *AC* y *BC*, por serlo á los planos *MN* y *PQ*; luego desde el punto *C* se podrian tirar dos perpendiculares á la recta *AB*; lo que es imposible.

TEOREMA 128.

Si á dos planos paralelos corta un tercer plano, las intersecciones son paralelas: pues dichas intersecciones se hallan en el plano secante; y no pueden encontrarse, aunque se prolonguen, por estar situadas en planos paralelos.

Recíproco del 127. *Si una recta* AB (fig. 157) *es perpendicular á un plano* MN, *es tambien perpendicular á cualquier plano* PQ *paralelo al primero.*

Por la recta *AB* tiro dos planos *CABD* y *EABF*, cuyas intersecciones con los planos *MN* y *PQ* serán respectivamente paralelas; es decir que la *AC* será paralela á la *BD*, y la *AE* á la *BF*. Siendo la *AB* perpendicular al plano *MN*, lo es á las rectas *AC* y *AE*; y por consiguiente tambien será perpendicular á las rectas *BD* y *BF*, paralelas á las *AC* y *AE*; luego [54] la *AB* es perpendicular al plano *PQ*.

TEOREMA 129 (*fig.* 158).

Las paralelas AB *y* CD *comprendidas entre dos planos paralelos* MN *y* PQ *son iguales:* pues tirando por ellas un plano

ABDC, sus intersecciones *AC* y *BD* con los planos paralelos serán paralelas; luego el cuadrilátero *ABDC* es un paralelógramo; y por tanto $AB = CD$.

Corolario. *Los puntos de un plano equidistan de su paralelo.*

Nota. Del mismo modo se demuestra que *las paralelas comprendidas entre un plano y una recta paralela á él son iguales*; y que por consiguiente *los puntos de una paralela á un plano equidistan del plano.*

TEOREMA 130 (*fig.* 159).

Si dos ángulos BAC *y* EDF, *situados en diferentes planos, tienen sus lados respectivamente paralelos y dirigidos en el mismo sentido, son iguales, y sus planos son paralelos.*

Tomo $AB = DE$, $AC = DF$, y tiro las rectas *AD*, *BE*, *CF*, *BC* y *EF*. Siendo la *AB* igual y paralela á la *DE*, la *AD* será igual y paralela á la *BE* [*Teor.* 30]. Siendo la *AC* igual y paralela á la *DF* , será la *AD* igual y paralela á la *CF*; luego las dos rectas *BE* y *CF*, iguales y paralelas á la *AD*, serán iguales y paralelas entre sí: luego la *BC* será igual y paralela á la *EF*. Luego los triángulos *ABC* y *DEF*, cuyos tres lados son respectivamente iguales, son iguales; y por tanto los ángulos *BAC* y *EDF* son iguales.

Para demostrar ahora que los planos *ABC* y *DEF* son paralelos, imaginémos que por el punto *D* pase un plano paralelo al *ABC*: como las paralelas comprendidas entre planos paralelos son iguales, dicho plano, que pasa por el punto *D*, y es paralelo al *ABC*, cortará á las paralelas *BE* y *CF* en puntos cuyas distancias á los *B* y *C* son iguales á la *AD*; luego dicho plano pasará por los puntos *E* y *F*, y por tanto coincidirá con el *DEF*; luego este es paralelo al plano *ABC*.

TEOREMA 131 (*fig.* 160).

Si tres planos MN, PQ, RS *paralelos cortan á dos rectas* AC *y* DF, *las cortan en partes proporcionales*; es decir, que tendremos la proporcion

$$AB : BC :: DE : EF.$$

Las dos rectas *AC* y *DF* pueden, ó no, estar en un mismo plano: la demostracion siguiente comprende estos dos casos.

Tiro las rectas *AD*, *CF*, y la *AF* que cortará al plano *PQ* en un punto *G*, y junto por medio de dos rectas los puntos *B*, *G* y los *E*, *G*. La recta *BG* es paralela á la *CF* [*Teor.* 128]; luego la razon $AB : BC$ es igual á la $AG : GF$; y como tambien la recta *GE* es paralela á la *AD*, la razon $AG : GF$ es igual á la $DE : EF$; luego las dos razones $AB : BC$ y $DE : EF$ son iguales.

58. Se llama *proyeccion* de un punto sobre un plano el pie de la perpendicular bajada desde dicho punto al plano; y *proyeccion* de una línea recta ó curva sobre un plano la línea que forman las proyecciones de sus diferentes puntos sobre el mismo plano.

TEOREMA 132 (*fig.* 161).

La proyeccion de una recta sobre un plano es otra recta (a).

Sea *AD* una recta, *a*, *b*, *c*, *d*, etc. las proyecciones de varios de sus puntos *A*, *B*, *C*, *D*, etc.: vamos á demostrar que dichas proyecciones *a*, *b*, *c*, *d*, etc. están en línea recta.

En efecto, las rectas *Bb*, *Cc*, *Dd*,... son paralelas á la *Aa*; luego todas están en un mismo plano [*Teor.* 111], y por consiguiente las proyecciones *a*, *b*, *c*, *d*,... están en la interseccion del plano *AaDd* y del *MN*; luego dichas proyecciones están en línea recta.

NOTA. Segun este teorema, dada una recta indefinida, se hallará su proyeccion, juntando por medio de una recta indefinida las proyecciones de dos de sus puntos. Si la recta es limitada, su proyeccion será la recta limitada que una las proyecciones de sus estremos.

El plano que contiene á una recta y á su proyeccion, se llama plano *proyectante* de la recta; y el plano sobre el que se proyecta una línea recta ó curva, se llama plano de *proyeccion*.

TEOREMA 133 (*fig.* 162).

Si dos rectas AB *y* CD *son paralelas en el espacio, sus proyecciones sobre un mismo plano son tambien paralelas:* pues si por dos puntos de cada una de estas dos rectas tiramos dos perpendiculares al plano de proyeccion, y juntamos por medio de dos rectas las proyecciones *a* y *b*, *c* y *d* que resultan, tendremos las proyecciones *ab* y *cd* de las dos rectas. Siendo la *AB* paralela á la *CD* por suposicion, y la *Aa* paralela á la *Cc*, el plano proyectante *ABab* será paralelo al plano proyectante *CDcd* [*Teor.* 130]; luego las intersecciones *ab* y *cd* de estos planos con el tercero *MN* serán paralelas.

TEOREMA 134 (*fig.* 163).

El ángulo agudo que forma una recta AB *con su proyeccion, es menor que el que forma dicha recta con otra cualquiera, que pase por su pie en el plano de proyeccion.*

(*a*) Ya se supone que se trata de una recta que no es perpendicular al plano, pues la proyeccion sobre un plano de una recta perpendicular á este plano es evidentemente un punto.

Desde un punto cualquiera *A* de la recta *AB* bajo una perpendicular *AC* al plano *MN*, y junto por medio de una recta los puntos *B* y *C*: tendré la proyeccion *BC* de la recta *BA*. Tomo ahora sobre una recta cualquiera *BD*, que pase por el punto *B* en el plano *MN*, una parte $BD = BC$, y junto los puntos *A* y *D*: los triángulos *ABC* y *ABD*, que tienen comun el lado *AB*, $BC = BD$, y $AC < AD$ [*Teor.* 118], nos darán [*Teor.* 17, *Recip.*] el ángulo $ABC < ABD$; que es lo que se queria demostrar.

59. El ángulo agudo que forma una recta con su proyeccion se llama, por abreviar, *ángulo de la recta y el plano*.

Se llama *ángulo de dos rectas que no se cortan en el espacio*, el ángulo formado por una de ellas y una paralela á la otra tirada por un punto de la primera; ó bien, el ángulo que forman dos rectas tiradas por un punto cualquiera del espacio paralelamente á las dadas.

CAPÍTULO III.

Angulos diedros.

---

60. Se llama *ángulo diedro* la separacion ó abertura de dos planos *ABC* y *DBC* (*fig.* 164) que se cortan.

Caras del ángulo diedro son los planos *ABC* y *DBC* que forman dicho ángulo.

Arista del ángulo diedro es la interseccion *BC* de las caras.

Un ángulo diedro se designa con cuatro letras, una cada cara y las dos de la arista, que se colocan en medio. Asi, el ángulo diedro, cuyas caras son *ABC* y *DBC* (*fig.* 165), se designará *ABCD*; y el diedro, cuyas caras son *ABC* y *EBC*, se designará *ABCE*.

Si un ángulo diedro está solo, puede designarse con las dos letras de la arista. Asi, el ángulo formado por los planos (*figura* 164) *ABC* y *DBC* puede designarse *BC*.

Dos ángulos diedros son iguales, cuando coincidiendo dos caras y las aristas, coinciden tambien las otras dos caras. De donde se infiere que la magnitud de un ángulo diedro no depende de la de sus caras, sino de la separacion de estas.

61. Se llaman ángulos diedros *adyacentes* dos ángulos diedros que tienen una cara comun y las otras dos caras en un solo plano. Asi, los dos ángulos diedros *ACED* y *BCED* (*fig.* 166) son adyacentes.

62. Un plano *CED* se llama *perpendicular* á otro *ACB*, cuando los ángulos adyacentes que forman, son iguales.

Un plano es *oblicuo* á otro, cuando los ángulos adyacentes que forman, son desiguales.

63. Se llama ángulo diedro *recto* cada uno de los dos diedros adyacentes formados por dos planos, de los que el uno es perpendicular al otro.

TEOREMAS 135 Y 136.

Por una recta dada en un plano no se puede levantar mas que un solo plano perpendicular al primero.

Dos ángulos diedros rectos son iguales, aunque no sean adyacentes.

Se demuestran estos dos teoremas del mismo modo que sus análogos los teoremas 1 y 2.

64. Angulo diedro *agudo* es el ángulo diedro menor que el recto, y *obtuso* el mayor.

TEOREMA 137.

La suma de dos ángulos diedros adyacentes es igual á dos ángulos diedros rectos.

Se demuestra como su análogo el teorema 3.

Corolarios. 1.° *Los cuatro ángulos diedros, que forma un plano con otro al cual es perpendicular, son rectos.* De donde se infiere, que *si un plano es perpendicular á otro, este es perpendicular al primero.*

2.° *La suma de los ángulos diedros consecutivos formados hácia un mismo lado de un plano es igual á dos rectos.*

3.° *La suma de todos los ángulos diedros consecutivos formados al rededor de una recta por varios planos que salen de esta recta, es igual á cuatro rectos.*

4.° *Un ángulo diedro cualquiera es menor que dos ángulos diedros rectos.*

Estos corolarios se deducen como sus análogos los del teorema 3.

65. Si la suma de dos ángulos diedros es igual á un diedro recto, cada uno se llama *complemento* del otro; ó bien los dos se llaman *complementarios.*

Si la suma de dos ángulos diedros es igual á dos diedros rectos, cada uno se llama *suplemento* del otro; ó bien los dos se llaman *suplementarios.*

66. Se llaman ángulos diedros *opuestos por la arista* dos ángulos diedros de los que el uno está formado por las prolongaciones de las caras del otro.

TEOREMA 138.

Los ángulos diedros opuestos por la arista son iguales.

Se demuestra como su análogo el teorema 4.

67. Llamaremos *ángulo plano correspondiente á un diedro* al ángulo formado por dos perpendiculares á la arista en un punto de esta, y cada una en cada uno de los planos que forman el diedro.

TEOREMA 139 (*fig.* 164).

Dos ángulos planos ABD, ECF *correspondientes á un mismo diedro* BC *son iguales.*

Siendo *AB* y *EC* perpendiculares á la arista *BC*, y estando las dos en el plano *ABC*, son paralelas; por la misma razon las *BD* y *CF* son paralelas; luego los dos ángulos planos *ABD* y *ECF* tienen sus lados respectivamente paralelos y dirigidos en el mismo sentido; luego [*Teor.* 130] dichos ángulos son iguales.

TEOREMA 140 (*figs.* 167 *y* 168).

1.° *Si dos ángulos diedros* ABCD *y* EFGH (fig. 167) *son iguales, sus ángulos planos correspondientes* ABD *y* EFH *son tambien iguales.*

2.° *Si dos ángulos diedros* ABCD *y* EFGH (fig. 168) *son desiguales, el ángulo plano* EFH *correspondiente al mayor diedro* EFGH *es mayor que el* ABD *correspondiente al menor diedro* ABCD.

1.° Coloco el diedro *EFGH* (*fig.* 167) sobre su igual, de modo que coincidan; y supongo que entonces el ángulo plano *EFH* tome la posicion *E'F'H'*: segun el teorema 139, los ángulos planos *ABD* y *E'F'H'* son iguales; luego tambien son iguales los ángulos planos *ABD* y *EFH*.

2.° Hago pasar por la arista *FG* (*fig.* 168) un plano *GFI*, que forme con el *EFG* el ángulo diedro *EFGI* igual al *ABCD*: tendremos [1.°] que los ángulos planos correspondientes *ABD* y *EFI* son iguales; y como $EFI < EFH$, será $ABD < EFH$.

Recíproco. 1.° *Si los ángulos planos correspondientes á dos diedros son iguales, los diedros son tambien iguales.*

2.° *Si los ángulos planos correspondientes á dos diedros son desiguales, el mayor corresponde á mayor diedro que el menor* [20].

TEOREMA 141 (*fig.* 169).

Si una recta AB *es perpendicular á un plano* MN, *todo plano* PQ *que pase por ella, es perpendicular al primer plano* MN.

Tiro en el plano *MN* por el punto *B* la *CBD* perpendicular á la *PB*: siendo la *AB* perpendicular al plano *MN*, es perpendicular á la recta *PB*; luego los ángulos *ABD* y *ABC* son los ángulos planos correspondientes á los diedros *QPBN* y *QPBM*: mas por ser la *AB* perpendicular al plano *MN*, es perpendicular á la *CD*, y por tanto dichos ángulos *ABD* y *ABC* son rectos, y por lo mismo iguales; luego los ángulos diedros *QPBN* y *QPBM* son iguales; luego el plano *PQ* es perpendicular al *MN*.

TEOREMA 142 (*fig.* 169).

Si dos planos MN *y* PQ *son perpendiculares entre sí, y en el uno* PQ *se tira una perpendicular* AB *á la interseccion* PB, *dicha perpendicular* AB *será tambien perpendicular al otro plano* MN.

Tiro en el plano *MN* por el punto *B* la *CBD* perpendicular á la *BP*: siendo iguales por hipótesi los diedros *QPBM* y *QPBN*, los ángulos planos correspondientes *ABC* y *ABD* son tambien iguales; luego la recta *AB* es perpendicular á la *CD*; y como por suposicion es perpendicular á la *PB*, será perpendicular al plano *MN* [34].

Recíproco. *Si dos planos* MN *y* PQ *son perpendiculares entre sí, y en un punto* B *de la interseccion se levanta una perpendicular al uno* MN, *dicha perpendicular estará contenida en el otro plano* PQ.

Apliquemos el método [40] á la demostracion de este recíproco.

Si la perpendicular al plano *MN* en el punto *B* no estuviere contenida en el plano *PQ*, por dicho punto *B* se podria levantar en el plano *PQ* una perpendicular á la interseccion *PB*, la cual perpendicular, segun el teorema directo, seria perpendicular al plano *MN*: luego por un punto *B* de un plano se podrian levantar dos perpendiculares á este plano; lo que es imposible.

TEOREMA 143 (*fig.* 170).

Si dos planos PA *y* SA *son perpendiculares á un tercero* MN, *la interseccion* AB *de los dos primeros será perpendicular á este tercer plano* MN: pues si en el punto *B*, comun á los tres planos, levanto una perpendicular al plano *MN*, estará contenida en los dos planos *PA* y *SA*; luego dicha perpendicular coincidirá con la interseccion *AB*, y por tanto esta es perpendicular al plano *MN*.

TEOREMA 144.

Por una recta oblicua ó paralela á un plano no pueden tirarse dos planos perpendiculares al primero: pues si fuese posible tirar por dicha recta dos planos perpendiculares al primero, la interseccion de dichos dos planos seria perpendicular á este primer plano; lo que es contrario á la hipótesi.

TEOREMA 145 (*fig.* 171).

La razon de dos ángulos diedros CABD, cabd *es la misma que la de sus ángulos planos correspondientes* CBD, cbd.

Los ángulos planos *CBD* y *cbd* pueden ser conmensurables ó inconmensurables.

1.° Si los ángulos planos *CBD* y *cbd* son conmensurables, supongamos que su medida comun sea el ángulo *cbm*, y que quepa 6 veces en el ángulo plano *CBD* y 5 en el *cbd*: la razon de los ángulos planos *CBD* y *cbd* será $\frac{6}{5}$. Hagamos pasar planos por las rectas divisorias *BM*, *BN*, *BO*, etc.; *bm*, *bn*, *bo*, etc., y por las aristas *AB* y *ab*: estos planos dividirán al ángulo diedro *CABD* en 6 ángulos diedros parciales, y al ángulo diedro *cabd* en 5 ángulos diedros parciales. Todos estos ángulos diedros parciales son iguales, porque lo son sus ángulos planos correspondientes; luego cualquiera de dichos ángulos diedros parciales puede considerarse como medida comun de los dos ángulos diedros propuestos; y por tanto la razon de estos es tambien $\frac{6}{5}$, la misma que la de los ángulos planos correspondientes.

2.° Si los ángulos planos *CBD* y *cbd* (*fig.* 171, *sin las lineas auxiliares* BM, BN, BO, BP, Bm, Bn, Bo, Bp) son inconmensurables, imaginemos que se divida uno de ellos, por ejemplo el *cbd*, en ángulos iguales, y que se tiren por el punto *B* en el plano *CBD* rectas que formen entre sí ángulos iguales á aquellos en que se divida el ángulo *cbd*: la última recta divisoria *BQ* no podrá caer sobre la *BD*, porque los ángulos planos *CBD* y *cbd* son inconmensurables; pero la recta *BQ* se podrá aproximar á la *BD* tanto como se quiera, puesto que nosotros podemos imaginar dividido el ángulo *cbd* en ángulos tan pequeños como queramos, y que el ángulo *QBD* es menor que uno de estos ángulos. Tiro el plano *ABQ*. Por ser conmensurables los ángulos *CBQ* y *cbd*, tendremos, segun el primer caso,

$$\frac{CABQ}{cabd} = \frac{CBQ}{cbd}.$$

Ahora, pudiéndose aproximar cuanto se quiera la recta *BQ* á la *BD*, se infiere que los límites de las variables $\frac{CABQ}{cabd}$ y $\frac{CBQ}{cbd}$ son las cantidades constantes $\frac{CABD}{cabd}$ y $\frac{CBD}{cbd}$; luego, segun el teorema de los límites, $\frac{CABD}{cabd} = \frac{CBD}{cbd}$.

NOTA. Si *cabd* es la unidad para medir el ángulo diedro *CABD*, la primera razon de la proporcion $\frac{CABD}{cabd}=\frac{CBD}{cbd}$ es la medida del ángulo diedro *CABD*: si tambien *cbd* es la unidad para medir el ángulo *CBD*, la segunda razon de dicha proporcion es la medida del ángulo *CBD*; luego si la unidad para medir un ángulo diedro es el diedro correspondiente á la unidad de los ángulos planos, la medida de un ángulo diedro y la de su ángulo plano correspondiente son iguales; ó en términos abreviados, *la medida de un ángulo diedro es su ángulo plano correspondiente.*

68. Las denominaciones de *alternos, correspondientes, etc.* se aplican á los ángulos diedros en los mismos casos que á los rectilíneos [15].

TEOREMA 146 (*fig.* 172).

Si á dos planos paralelos *MN* y *PQ* corta un tercer plano *RS*: 1.° *Los ángulos diedros alternos son iguales.* 2.° *Los ángulos diedros correspondientes son iguales.* 3.° *La suma de los dos ángulos diedros internos de un mismo lado del plano secante es igual á dos rectos.*

1.° Las intersecciones *AB* y *CD* del plano secante *RS* y los paralelos *MN* y *PQ* son paralelas [*Teor.* 128]; luego, si tiramos un plano *EFIG* perpendicular á la interseccion *AB*, lo será tambien á su paralela *CD* [*Teor.* 127, *Recip.*]. El plano *EFIG* cortará á los tres primeros por las rectas *GH* é *IK* paralelas, y por la *EF*, y puesto que dicho plano *EFIG* es perpendicular á la recta *AB*, esta será perpendicular á las *GO* y *OL*, que pasan por su pie *O* en dicho plano *EFIG*: luego el ángulo *GOL* es el ángulo plano correspondiente al diedro *MABS*, y por la misma razon el ángulo *KLO* es el ángulo plano correspondiente al diedro *QCDR*; y pues los dos ángulos alternos *GOL, KLO* son iguales, por ser paralelas las rectas *GH* é *IK*, los diedros alternos *MABS, QDCR* son iguales [*Teor.* 140, *Recip.* 1.°].

Del mismo modo se demuestran los otros dos teoremas.

TEOREMA 147 (*fig.* 173).

Si desde un punto tomado en el interior de un ángulo diedro BADC *se bajan dos perpendiculares á sus caras* AC *y* AB, *el ángulo de dichas perpendiculares es suplemento del diedro* BADC.

Siempre podemos tomar en el interior del diedro un punto *O*, tal que si desde él se bajan dos perpendiculares *OS* y *OT* á las caras, los pies de estas perpendiculares caigan en las caras del diedro y no en sus prolongaciones. Por dichas dos perpendiculares *OS* y *OT* hago pasar un plano que cortará á la arista *AD* en un punto *F*, y á las caras del diedro por las rectas *FS* y *FT*. Siendo las rectas *OS* y *OT* perpendiculares á los planos *ABD* y *ACD*, el plano *OSFT* será perpendicular á los dos planos *ABD* y *ACD* [*Teor.* 141], y por consiguiente á su interseccion *AD* [*Teor.* 143]; luego *AD* será perpendicular á las rectas *FS* y *FT*, y por tanto el ángulo *TFS* es la medida del diedro *BADC*. En el cuadrilátero *OSFT*, siendo rectos los dos ángulos *S* y *T*, es $O + SFT = 2R$, es decir, que los ángulos *O* y *SFT* son suplementarios; y pues el ángulo *SFT* es la medida del diedro *BADC*, se infiere que el ángulo *O* es suplemento del diedro *BADC*.

Ahora, cualquiera que sea el punto del interior del diedro, desde el cual se bajen dos perpendiculares á sus caras, el ángulo que estas perpendiculares formen, será igual al ángulo *O*, por tener sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido [*Teorema* 130]; luego dicho ángulo será suplemento del diedro *BADC*.

CAPÍTULO IV.

Angulos poliedros.

69. Se llama ángulo *poliedro* ó ángulo *sólido* la reunion de tres ó mas ángulos planos *AVB*, *BVC*, *CVD*, etc. (*fig.* 175, *sin el polígono* ABCDE) que tienen un vértice comun *V*, y cada dos de ellos un lado comun.

El vértice comun á los ángulos planos que forman el ángulo poliedro, se llama *vértice* de este ángulo.

Un ángulo poliedro se enuncia con sola la letra de su vértice, ó con dicha letra seguida de otra de cada arista.

Si el ángulo poliedro está formado por tres ángulos planos, se llama ángulo *triedro*.

Un ángulo poliedro se llama *convexo*, cuando cortadas todas sus caras por medio de un plano, la interseccion es un polígono convexo; y el águlo poliedro no será convexo, si dicha interseccion no es un polígono convexo.

TEOREMA 148 (*fig.* 174).

Un ángulo plano cualquiera de un ángulo triedro es menor que la suma de los otros dos.

Sea *V* el ángulo triedro, y *AVC* el mayor de sus tres ángulos planos: digo que $AVC < AVB + BVC$.

Tiro en el plano *AVC* la recta *VD*, que forme con la arista *VA* el ángulo $AVD = AVB$; por un punto cualquiera *D* de la *VD* tiro una recta *AC*, que corte á las dos aristas *VA* y *AC*; tomo

$VB = VD$, y tiro las rectas BA y BC. Los triángulos AVB y AVD son iguales; luego $AB = AD$; y como $AB + BC > AC$, será $BC > DC$. Los triángulos BVC y DVC nos darán [*Teor. recip. del* 17] el ángulo $BVC > DVC$. Añadiendo á ambos miembros de esta desigualdad los ángulos iguales AVB y AVD, será

$$BVC + AVB > DVC + AVD, \text{ ó en fin } BVC + AVB > AVC.$$

Corolario. *Un ángulo plano cualquiera de un triedro es mayor que la diferencia de los otros dos:* pues, segun el teorema, tenemos

$$BVC + AVB > AVC;$$

luego restando BVC de ambos miembros, tendremos

$$AVB > AVC - BVC.$$

Si hubiésemos restado de los dos miembros de la desigualdad que nos da el teorema, el ángulo AVB, hubiera resultado

$$BVC > AVC - AVB.$$

TEOREMA 149 (*fig.* 175).

La suma de todos los ángulos planos de un ángulo poliedro convexo es menor que cuatro rectos.

Sea V el ángulo poliedro, compuesto de los n ángulos planos AVB, BVC, CVD, etc., s la suma de estos n ángulos: digo que $s < 4R$.

Para demostrarlo, cortemos por medio de un plano todas las aristas del ángulo poliedro, y la interseccion será un polígono convexo de n lados. En cada uno de los ángulos triedros, cuyos vértices son los puntos A, B, C, etc., la suma de dos ángulos planos es mayor que el tercero; es decir, $VBA + VBC > ABC$, $VCB + VCD > BCD$, y asi en los demas triedros: luego si llamamos S á la suma de los ángulos inferiores de los n triángulos laterales, tendremos $S \gtrsim 2Rn - 4R$ [*Teor.* 26, *Nota*]; pero $s + S = 2Rn$; luego $s + 2Rn - 4R < 2Rn$: y añadiendo $4R$ á los dos miembros de esta desigualdad, será $s + 2Rn < 4R + 2Rn$, y por último $s < 4R$.

70. Se llaman ángulos triedros *simétricos* dos ángulos triedros, de los que el uno está formado por las prolongaciones de las aristas del otro, ó es igual al formado por las prolongaciones de las aristas del otro.

TEOREMA 150 (*figs.* 176 *y* 177).

Dos ángulos triedros simétricos VABC, VDEF *tienen sus ángulos planos y diedros respectivamente iguales; pero no pueden coincidir en el caso general, es decir, en el caso en que los tres ángulos diedros de uno de ellos son desiguales. Dichos ángulos triedros pueden coincidir, si uno de ellos tiene dos ángulos diedros iguales.*

$s + 2Rn - 4R$

En efecto (*fig.* 176), el ángulo $AVB = DVE$, el $AVC = DVF$, el $BVC = EVF$: el ángulo diedro $AV = DV$, por ser opuestos por la arista, y por la misma razon el diedro $BV = EV$, y el diedro $CV = FV$.

Para demostrar que estos dos triedros no pueden coincidir si los tres ángulos diedros AV, BV y CV son desiguales, coloquemos el triedro $VDEF$ de modo que las aristas FV y DV coincidan respectivamente con las AV y CV, y que las aristas EV y BV queden hácia un mismo lado del plano AVC: como el diedro VC no es igual al diedro VA, y por tanto el diedro VF no es igual al VA, el plano FVE no coincide con el plano AVB, y por consiguiente los triedros no coinciden. Si colocamos el triedro $VDEF$, de modo que la arista VD coincida con la VA, y la VF con la VC, las aristas VE y VB quedarán á uno y otro lado del plano AVC, y por consiguiente tampoco coinciden los triedros.

Queda, pues, demostrado, que los dos triedros simétricos $VABC$, $VDEF$ tienen sus seis elementos respectivamente iguales, y que no pueden coincidir en el caso en que los tres ángulos diedros del uno son desiguales.

Supongamos ahora que los dos ángulos diedros AV y CV (*fig.* 177) sean iguales: como estos diedros son iguales á los VD y VF, se infiere que los cuatro ángulos diedros AV, CV, VD y VF son iguales. Coloquemos el triedro $VDEF$ de modo que la arista VF coincida con la VA, la VD con la VC, y que la arista VE quede hácia el mismo lado del plano AVC que la arista VB. Siendo iguales los ángulos diedros AV y FV, el plano EFV caerá sobre el plano BAV, y siendo el diedro VD igual al diedro VC, el plano EVD caerá sobre el plano BCV; luego la arista VE caerá sobre la VB; y por tanto los dos ángulos triedros simétricos $VABC$ y $VDEF$ coinciden.

TEOREMA 151 (*fig.* 178).

Dos ángulos triedros VABC, V'A'B'C' *son iguales, cuando tienen dos ángulos planos respectivamente iguales,* $AVB = A'V'B'$, $AVC = A'V'C'$, *igualmente dispuestos, é igual el ángulo diedro comprendido,* $VA = V'A'$.

Coloquemos el triedro $V'A'B'C'$ sobre el $VABC$, de modo que las aristas $V'A'$, $V'C'$ coincidan con las VA, VC; el plano $A'B'V'$, caerá sobre el plano ABV, por ser iguales los diedros AV y $A'V'$, y la arista $V'B'$ caerá sobre la VB, por ser iguales los ángulos planos AVB y $A'V'B'$. Luego los dos triedros, cuyas tres aristas coinciden, son iguales.

NOTA. Si los ángulos planos respectivamente iguales AVB y

$A'V'B'$, AVC y $A'V'C'$ (*figs.* 176 y 179) tienen disposicion contraria, los triedros $VABC$, $V'A'B'C'$ serán simétricos.

En efecto, el triedro $VDEF$, simétrico del $VABC$, tiene el ángulo $DVE = AVB = A'V'B'$, el ángulo $DVF = AVC = A'V'C'$, y el ángulo diedro $DV = AV = A'V'$; luego los dos triedros $VDEF$, $V'A'B'C'$ tienen los ángulos planos respectivamente iguales, igualmente dispuestos (como se verá fácilmente, si se coloca el triedro $VDEF$ con el vértice hácia arriba en posicion análoga á la del triedro $V'A'B'C'$) é igual el diedro comprendido; luego dichos dos triedros son iguales; y pues el $VDEF$ es simétrico del $VABC$, tambien el $V'A'B'C'$ será simétrico del $VABC$.

TEOREMA 152 (*fig.* 178).

Dos ángulos triedros VABC, V'A'B'C' *son iguales, cuando tienen un ángulo plano igual,* AVC = A'V'C', *y los diedros adyacentes respectivamente iguales,* BVAC = B'V'A'C', BVCA = B'V'C'A', *é igualmente dispuestos.*

Coloquemos el triedro $V'A'B'C'$ sobre el $VABC$, de modo que coincidan las aristas $V'A'$ y VA, $V'C'$ y VC: el plano $A'B'V'$ caerá sobre el plano ABV, por ser iguales los diedros $BVAC$ y $B'V'A'C'$, y el plano $B'C'V'$ caerá sobre el BCV por la misma razon. Luego la arista $V'B'$, que tiene que caer al mismo tiempo sobre los planos BAV y BCV, caerá sobre la VB; y por consiguiente los triedros son iguales.

NOTA. Si los ángulos diedros respectivamente iguales tienen disposicion contraria (*figs.* 176 *y* 179), se demostrará como en el teorema anterior, que los dos triedros $VABC$ y $V'A'B'C'$ son simétricos.

TEOREMA 153 (*figs.* 180 *y* 181).

Dos ángulos triedros VABC, V'A'B'C' *son iguales, cuando tienen sus tres ángulos planos respectivamente iguales,* AVB = A'V'B', AVC = A'V'C', BVC = B'V'C', *é igualmente dispuestos.*

El teorema quedará demostrado, si hacemos ver que dos ángulos diedros $BVAC$ y $B'V'A'C'$, opuestos á dos ángulos planos iguales BVC y $B'V'C'$, son iguales [*Teor.* 151].

Supongamos en primer lugar que los ángulos BVA y CVA (*fig.* 180) sean agudos, y por lo tanto tambien sus iguales $B'V'A'$ y $C'V'A'$. Tomemos las partes iguales VA y $V'A'$, y construyamos los dos ángulos planos CAB y $C'A'B'$ correspondientes á los diedros VA y $V'A'$: las perpendiculares AB y AC encontrarán á los lados VB y VC, y no á sus prolongaciones en sentido contrario, por ser agudos los ángulos BVA y CVA; é igualmente las perpendiculares $A'B'$ y $A'C'$ encontrarán á las aristas $V'B'$ y $V'C'$: tiro las dos rectas *BC* y *B'C'*. Los triángulos rectángulos *VAB* y *V'A'B'* son iguales [*Teor.* 16]; luego *VB* = *V'B'* y *AB* = *A'B'*. Los triángulos rectángulos *VAC* y *V'A'C'* son iguales; luego *VC* = *V'C'* y *AC* = *A'C'*. Los triángulos *VBC* y *V'B'C'* son iguales [*Teorema* 15]; luego *BC* = *B'C'*. Los triángulos *ABC* y *A'B'C'* son iguales [*Teor. recip. del* 15]; luego los ángulos *BAC* y *B'A'C'*, correspondientes á los diedros *VA* y *V'A'*, son iguales; luego estos diedros son iguales.

Si los ángulos planos *AVB* y *AVC* (*fig.* 181) no son ambos agudos, podrán ser uno agudo y otro recto, uno agudo y otro obtuso, los dos rectos, uno recto y otro obtuso, ó los dos obtusos. La demostracion siguiente comprende todos estos casos.

Tomemos las seis partes iguales *VA* = *VB* = *VC* = *V'A'* = *V'B'* = *V'C'*, y tiremos las rectas *AB*, *AC*, *BC*, *A'B'*, *A'C'*, *B'C'*. Los triángulos *VAB* y *V'A'B'*, *VAC* y *V'A'C'*, *VBC* y *V'B'C'* son iguales [*Teor.* 15]; luego los triángulos *ABC* y *A'B'C'* son iguales [*Recip. del* 15]. Tenemos pues que los dos triedros *ABCV* y *A'B'C'V'* [69] tienen sus tres ángulos planos respectivamente iguales, y como los ángulos *VAB* y *V'A'B'*, *VAC* y *V'A'C'* son agudos, por ser ángulos de las bases de triángulos isósceles, se infiere, segun el primer caso, que los dos ángulos diedros *VA* y *V'A'* son iguales.

Nota. Si los ángulos planos respectivamente iguales tienen disposicion contraria (*figs.* 176 *y* 179), se demostrará como en [*Teor.* 151, *Nota*] que los dos triedros son simétricos.

71. Dos ángulos triedros se llaman *suplementarios*, cuando los ángulos planos de cada uno son suplementos de los ángulos diedros del otro.

TEOREMA 154 (*fig.* 182).

A todo ángulo triedro O *corresponde otro ángulo triedro suplementario.*

Siempre podemos tomar en el interior del triedro *O* un punto *O'*, tal que si desde él se bajan las perpendiculares *O'D*, *O'E*, *O'F* á las caras del triedro *O*, el punto *O* quede dentro del triedro *O'*.

Siendo las rectas *O'D*, *O'E*, *O'F* perpendiculares á las caras *BOC*, *AOC*, *AOB*, el ángulo *EO'D* es suplemento del diedro *OC* [*Teor.* 147], el ángulo *DO'F* es suplemento del diedro *OB*, y el ángulo *EO'F* es suplemento del diedro *OA*.

Los planos *DO'E*, *DO'F*, *EO'F* son perpendiculares respectivamente á los planos *BOC* y *AOC*, *BOC* y *AOB*, *AOB* y *AOC* [*Teor.* 141]; y las rectas *OC*, *OB*, *OA*, intersecciones de estos planos, serán perpendiculares á los planos *DO'E*, *DO'F*, *EO'F* [*Teor.* 143]; luego los ángulos planos *AOB*, *AOC*, *BOC* serán suplementos de los diedros $O'F$, $O'E$, $O'D$; luego los dos triedros O y O' son suplementarios.

Nota. Como hay infinitos puntos, como el O', desde los cuales pueden bajarse las perpendiculares á las caras del triedro O, de modo que el punto O quede dentro del triedro que formen las tres perpendiculares, se infiere que hay infinitos triedros suplementarios de uno dado: pero como los ángulos planos de todos los referidos triedros son iguales respectivamente, y están igualmente dispuestos, todos los dichos triedros son iguales, y por tanto un triedro no tiene mas que un suplementario.

TEOREMA 155.

La suma de los ángulos diedros de un triedro es mayor que dos rectos y menor que seis.

Sean A, B, C los tres ángulos diedros del triedro, a', b', c' los tres ángulos planos del triedro suplementario del propuesto, suplementos respectivos de los ángulos A, B, C: tendremos

$$A = 2R - a',\ B = 2R - b',\ C = 2R - c';$$

luego $$A + B + C = 6R - (a' + b' + c') \quad [1].$$

La suma $a' + b' + c'$ de los ángulos planos del triedro suplementario del propuesto es menor que $4R$ [*Teor.* 149]; luego

$$A + B + C > 2R.$$

Tambien es evidente, sea porque cada ángulo diedro de un triedro es menor que dos rectos, sea por la igualdad [1], que la suma $A + B + C$ es menor que seis rectos.

Corolario. *La diferencia entre la suma de dos ángulos diedros de un triedro y el tercer ángulo diedro es menor que dos rectos:* pues en el triedro suplementario tendremos $a' + b' > c'$; luego, reemplazando a', b', c' por sus valores $2R - A$, $2R - B$, $2R - C$, será $$2R - A + 2R - B > 2R - C,$$
y por consiguiente $$A + B - C < 2R.$$

TEOREMA 156 (*fig.* 183).

Dos ángulos triedros VABC, V'A'B'C' *son iguales, cuando tienen sus tres ángulos diedros respectivamente iguales,* BVAC = B'V'A'C', AVBC = A'V'B'C', AVCB = A'V'C'B', *é igualmente dispuestos.*

Sean $OPQR$, $O'P'Q'R'$ los triedros suplementarios de los propuestos: tendremos que serán iguales sus ángulos planos POQ y $P'O'Q'$, POR y $P'O'R'$, QOR y $Q'O'R'$, como suplementos de los diedros iguales de los triedros propuestos; luego [*Teor.* 153] los diedros $QPOR$ y $Q'P'O'R'$ serán iguales; luego tambien serán iguales los ángulos planos AVC y $A'V'C'$ suplementos de los diedros iguales *QPOR* y *Q'P'O'R'*: luego los dos diedros propuestos tienen un ángulo plano igual $AVC = A'V'C'$, y los ángulos diedros adyacentes respectivamente iguales é igualmente dispuestos; luego [*Teor.* 152] dichos triedros son iguales.

NOTA. Si los ángulos diedros respectivamente iguales tienen disposicion contraria (*figs.* 174 *y* 177), se demostrará como en [*Teor.* 151, *Nota*] que los dos triedros son simétricos.

TEOREMA 157 (*figs.* 177 *y* 184).

1.° *Si un ángulo triedro* VABC (fig. 177) *tiene dos ángulos diedros iguales* VA *y* VC, *los ángulos planos opuestos* BVC *y* BVA *son iguales.*

2.° *Si un ángulo triedro* VABC (fig. 184) *tiene dos ángulos diedros* VA *y* VC *desiguales, al mayor* VA *se opone mayor ángulo plano.*

1.° Prolongo las aristas en sentido contrario al suyo, y resultará el triedro *VDEF* simétrico del propuesto.

Segun el teorema 150, el triedro *VDEF* puede coincidir con su simétrico el *VABC*, y por tanto son iguales los ángulos *FVE* y *AVB*; mas como tambien el ángulo *FVE* es igual al *BVC*, se infiere que son iguales los dos ángulos *AVB* y *BVC*.

2.° Tiro por la arista *VA* un plano *VAD* que forme con el *AVC* un ángulo diedro *DAVC* igual al diedro *VC*: sea *VD* la interseccion de dicho plano con el *BVC*. Siendo en el triedro *VADC* iguales los diedros *DAVC* y *VC*, los ángulos planos *DVC* y *AVD*, opuestos á ellos, son iguales [1.°]. En el triedro *VABD* tenemos [*Teor.* 148] $DVB + DVA > BVA$; luego $DVB + DVC > BVA$, ó $BVC > BVA$.

Recíproco. 1.° *Si un ángulo triedro tiene dos ángulos planos iguales, los ángulos diedros opuestos son tambien iguales.*

2.° *Si un ángulo triedro tiene dos ángulos planos desiguales, al mayor se opone mayor ángulo diedro* [20].

PROBLEMA 49 (*fig.* 185).

Desde un punto* P, *tomado fuera de un plano* MN, *bajar una perpendicular al plano.

Tírense desde el punto *P* tres rectas iguales *PA*, *PB* y *PC* hasta el plano *MN*, hállese el centro *O* de la circunferencia que pasa por los tres puntos *A*, *B* y *C*, y la *PO* será la perpendicular al plano *MN*.

Pues siendo iguales las rectas *PA*, *PB* y *PC*, sus pies *A*, *B* y *C* estarán á igual distancia del pie de la perpendicular; mas tambien están á igual distancia del centro *O*, y no hay en el plano ningun otro punto diferente del punto *O*, que esté á igual distancia de los puntos *A*, *B* y *C* [*Teor.* 39]; luego el centro *O* es el pie de la perpendicular al plano *MN*.

PROBLEMA 50 (*fig.* 186).

Dadas dos rectas AB *y* CD *que no están en un mismo plano, hallar su mas corta distancia.*

Por un punto *B* de la *AB* tiro la *BE* paralela á la *CD*, desde un punto cualquiera *D* de la *CD* bajo la *DF* perpendicular al plano *ABE*, por el pie *F* de esta perpendicular tiro la *FG* paralela á la *BE*, y finalmente tiro la *GH* paralela á la *DF*; y la *GH* será perpendicular á las dos rectas, y al mismo tiempo su mas corta distancia.

En efecto, siendo la recta *DC* paralela á la *BE*, es paralela al plano *ABE* [*Teor.* 124]; y siendo la *DF* perpendicular á este plano, su paralela *HG* es tambien perpendicular al plano *ABE*, y por consiguiente á las dos rectas *AB* y *GF*: siendo la *HG* perpendicular á la *GF*, será tambien perpendicular á su paralela *CD*.

Para demostrar ahora que la *HG* es la línea mas corta que puede tirarse entre las dos rectas *AB* y *CD*, tiro una recta cualquiera *LK* entre estas rectas, y la *LM* paralela á la *HG*: tendremos que, por ser la *GH* perpendicular al plano *ABE*, su paralela *LM* es tambien perpendicular al plano *ABE*, y por tanto la *LK* es oblícua á dicho plano: luego $LK > LM$, ó $LK > HG$.

LIBRO SEGUNDO.

POLIEDROS.

Nociones preliminares.

72. Se llama *poliedro* el cuerpo terminado por polígonos: estos polígonos se llaman *caras* del poliedro.

Se llama *tetraedro* el poliedro que tiene cuatro caras; *pentaedro* el que tiene cinco caras; *exaedro* el que tiene seis; etc.

Se llama poliedro *convexo* el poliedro cuya superficie no puede ser cortada por una recta mas que en dos puntos.

Se llama *diagonal* de un poliedro la recta que une dos vértices no situados en la misma cara.

CAPÍTULO I.

Pirámides.

73. Se llama *pirámide* el poliedro cuyas caras son un polígono cualquiera, llamado *base*, y varios triángulos que tienen un mismo vértice.

Vértice ó *cúspide* de la pirámide es el vértice comun á las caras triangulares.

Altura de la pirámide es la perpendicular bajada desde la cúspide al plano de la base.

Pirámide *triangular, cuadrangular, pentagonal, etc.* es la pirámide que tiene por base un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono, etc.

El tetraedro es una pirámide triángular.

74. Se llama pirámide *regular* la pirámide que tiene por base un polígono regular, y cuyas aristas laterales son todas iguales.

De esta definicion se infiere: 1.° *que todos los triángulos laterales de una pirámide regular son iguales* [Teor. recip. del 15]; 2.° *que el pie de la altura de una pirámide regular es el cen-*

tro de la base: pues los pies de las aristas laterales iguales equidistan del pie de la altura [*Teor.* 119, *Recip.* 1.°]; mas dichos pies, que son los vértices del polígono regular, equidistan tambien del centro de este polígono; luego el pie de la altura es el centro de la base.

Se llama pirámide *troncada* ó *tronco* de pirámide la porcion de pirámide comprendida entre la base y un plano que córte á todas las aristas laterales.

TEOREMA 158 (*fig.* 187).

Toda seccion FGHIK *paralela á la base* ABCDE *de una pirámide es semejante á dicha base.*

En efecto, tiro desde un vértice A de la base diagonales á todos los demás, y tiro en seguida los planos VAC y VAD. Siendo paralelos los planos $ABCDE$ y $FGHIK$, serán paralelos los lados de ambos polígonos, como tambien las diagonales [*Teorema* 128]; luego los triángulos ABC y FGH, ACD y FHI, ADE y FIK son semejantes, pues sus ángulos son respectivamente iguales [*Teor.* 130]; luego los polígonos $ABCDE$ y $FGHIK$ son semejantes [*Teor.* 65].

PROBLEMA 51 (*fig.* 187).

Dada una pirámide troncada ADFI *de bases paralelas, hallar la altura* VO *de la pirámide total, y la* VP *de la pirámide deficiente.*

Supóngase construida la pirámide total $VABCDE$, y tírese un plano VBO por la altura VO y una arista VB: las intersecciones BO y GP de este plano con los planos paralelos $ABCDE$, $FGHIK$ serán paralelas [*Teor.* 128]. Los triángulos semejantes VAB y VFG, VBO y VGP nos dan

$$AB : FG :: VB : VG,$$
$$VB : VG :: VO : VP;$$

luego $$AB : FG :: VO : VP.$$

Los términos VO y VP de esta proporcion son las dos alturas que nos proponemos hallar. Para esto, modifico dicha proporcion de manera que no quede mas que un solo término incógnito; lo que se puede, porque la diferencia $VO - VP$ es la altura PO del tronco que se supone conocida [*Aritm.* 175]. Tenemos [*Aritm.* 172]

$$AB - FG : AB :: VO - VP = PO : VO,$$
$$AB - FG : FG :: VO - VP = PO : VP,$$

de donde $$VO = \frac{AB \times PO}{AB - FG},\ VP = \frac{FG \times PO}{AB - FG}.$$

CAPÍTULO II.

Prismas.

---

75. Se llama *prisma* el poliedro cuyas caras son dos polígonos paralelos é iguales, y paralelógramos todos los demás.

Las dos caras paralelas é iguales se llaman *bases* del prisma, y las otras se llaman caras *laterales*.

Altura de un prisma es la perpendicular bajada desde un punto de una base al plano de la otra.

Prisma *triangular, cuadrangular, pentagonal,* etc. es el prisma cuya base es un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono, etc.

76. Para construir un prisma, se tiran por los vértices de un polígono *ABCDE* (*fig.* 188) las paralelas *AF*, *BG*, *CH*, etc. hácia un mismo lado de este polígono, y cortándolas en seguida por un plano *FGHIK* paralelo al *ABCDE*, el poliedro *AH* que resulta, será un prisma. Porque, siendo las rectas *AB*, *BC*, *CD*, etc. paralelas á la *FG*, *GH*, *HI*, etc. [*Teor.* 128], los cuadriláteros *AFGB*, *BGHC*, etc. son paralelógramos. Además, los ángulos de los polígonos *ABCDE*, *FGHIK* son respectivamente iguales [*Teorema* 130]; luego estos dos polígonos pueden coincidir, y por tanto el poliedro *AH* es un prisma.

Prisma *recto* es el prisma cuyas aristas laterales son perpendiculares á las bases; y prisma *oblícuo* es el prisma cuyas aristas laterales son oblícuas á las bases.

Las caras laterales de un prisma recto son rectángulos; pues siendo las aristas laterales perpendiculares á las bases, son perpendiculares á los lados de estas bases.

Seccion *recta* de un prisma oblícuo es la seccion perpendicular á las aristas laterales.

77. Se llama prisma *regular* el prisma recto cuya base es un polígono regular.

78. Prisma *troncado* ó *tronco* de prisma es la porcion de prisma comprendida entre la base y un plano oblícuo á ella é intermedio entre ambas bases.

TEOREMA 159 (*fig.* 189).

Dos prismas rectos de igual base é igual altura son iguales.

Sean los dos prismas rectos *FC* y *QN*, cuyas bases *FGHIK*, *QRSTV* son iguales, y cuyas alturas *AF*, *LQ* son tambien iguales: digo que estos dos prismas son iguales.

Coloco el prisma *QN* sobre el *FC*, de modo que coincidan sus bases iguales: la arista *QL* caerá entonces sobre la *FA*, porque en un punto *F* de un plano no se puede levantar mas que una sola perpendicular á dicho plano; y como dichas dos aristas *FA* y *QL* son iguales, el punto *L* caerá sobre el punto *A*. Del mismo modo se demuestra que los puntos *M*, *N*, *O*, *P* caen sobre los *B*, *C*, *D*, *E*. Luego los dos prismas coinciden, y por tanto son iguales.

TEOREMA 160 (*fig.* 188).

Toda seccion LMNOP *paralela á la base* ABCDE *de un prisma es igual á dicha base.*

En efecto, los lados de los polígonos *ABCDE*, *LMNOP* son respectivamente paralelos [*Teor.* 128]; luego los cuadriláteros *ABML*, *BCNM*, etc. son paralelógramos, y por tanto $AB = LM$, $BC = MN$, $CD = NO$, etc.: además los ángulos de dichos polígonos son respectivamente iguales [*Teor.* 130]; luego estos polígonos pueden coincidir, ó son iguales.

79. Se llama *paralelepipedo* el prisma cuya base es un paralelógramo.

Paralelepipedo *rectángulo* es el paralelepipedo que ademas de ser recto, tiene por base un rectángulo.

Las seis caras de un paralelepipedo rectángulo son rectángulos.

Cubo es el paralelepipedo cuyas seis caras son seis cuadrados.

TEOREMA 161 (*fig.* 190).

Las caras laterales opuestas de un paralelepipedo son iguales y paralelas.

Sea el paralelepipedo *EC*: digo que la cara *ADHE* es igual y paralela á la cara *BCGF*, y la cara *ABFE* igual y paralela á la cara *DCGH*.

Los dos paralelógramos *ADHE*, *BCGF* tienen iguales los lados *AE* y *BF*, por ser lados opuestos del paralelógramo *AEFB*, y por igual razon tienen iguales los lados *AD* y *BC*: ademas los ángulos *DAE*, *CBF* son iguales [*Teor.* 130]; luego [*Teor.* 32] dichos paralelógramos son iguales.

Las mismas caras *ADHE*, *BCGF* son paralelas, porque los ángulos *DAE*, *CBF* tienen sus lados respectivamente paralelos [*Teor.* 130].

Del mismo modo se demuestra que las dos caras *ABFE* y *DCGH* son iguales y paralelas.

NOTA. Segun este teorema, se pueden tomar por bases del paralelepipedo dos caras opuestas cualesquiera.

LIBRO TERCERO.

LOS TRES CUERPOS REDONDOS.

CAPÍTULO I.

Cono y Cilindro.

80. Se llama *cono* el cuerpo engendrado por un triángulo rectángulo *VCA* (*fig.* 191) que gira al rededor de uno de los catetos *VC*.

En este movimiento el cateto movible *AC* describe un círculo, cuyo centro es el punto *C*; pues la recta *AC* es perpendicular en todas sus posiciones al cateto *VC*, y por consiguiente describe un plano [*Teor.* 113]. Ademas el punto *A* se halla en todas las posiciones del cateto *AC* á igual distancia del punto *C*; luego la curva *AB* es una curva plana, cuyos puntos están todos á igual distancia del punto *C*, es decir, que dicha curva es una circunferencia.

Se llama *eje* ó *altura* del cono el cateto fijo del triángulo generador.

Base del cono es el círculo descrito por el cateto movible del triángulo generador.

Lado del cono es la hipotenusa del triángulo generador en cualquiera de las posiciones de este.

Vértice ó *cúspide* del cono es el vértice del ángulo opuesto al cateto movible del triángulo generador.

Cono troncado ó *tronco de cono* es la parte de cono comprendida entre la base y un plano que corta todos los lados del cono.

TEOREMA 162 (*fig.* 191).

Toda seccion PRS *paralela á la base de un cono es un círculo, cuyo centro está en el eje.*

Por los lados *VA*, *VQ*, *VB*, etc. y por el eje tiro los planos *VAC*, *VQC*, *VBC*, etc.; las intersecciones *AC* y *PO*, *QC* y *RO*, *BC* y *SO* de dichos planos con los paralelos *AB* y *PS* serán paralelas [*Teor.* 128]; luego los triángulos semejantes VAC y VPO, VQC y VRO, VBC y VSO nos dan las proporciones

$$VC : VO :: AC : PO,$$
$$VC : VO :: QC : RO,$$
$$VC : VO :: BC : SO.$$

Estas proporciones tienen sus tres primeros términos respectivamente iguales; luego $PO = RO = SO$. Vemos que la curva PRS es una curva plana, cuyos puntos equidistan del punto O; dicha curva es pues una circunferencia cuyo centro es el punto O del eje.

TEOREMA 163 (*fig.* 192).

La superficie lateral de un cono VAB *puede desarrollarse en un sector circular* VBB′ *cuyo lado es el radio* VB *del cono y cuyo arco* BB′ *es igual en longitud á la circunferencia de la base de dicho cono.*

Coloquemos el cono de modo que uno de sus lados VB coincida con un plano, y hagamos rodar el cono en este plano (sin que el vértice mude de lugar) hasta que el mismo lado VB venga nuevamente á coincidir con el plano en la posicion VB'. En virtud de este movimiento los infinitos lados del cono coincidirán sucesivamente con el plano, y la superficie plana VBB', formada por todos ellos, será la superficie desarrollada del cono. Ahora, siendo iguales todos los lados del cono, la curva BB' tendrá todos sus puntos á igual distancia del punto V. La circunferencia cuyo radio es VB, es mayor que la circunferencia AB, pues el radio de aquella es mayor que el de esta; y como la longitud de la curva BB' es la misma que la de la circunferencia AB, y es menor por lo tanto que la circunferencia cuyo radio es VB, se infiere que la curva BB' es un arco de esta circunferencia: luego la superficie VBB' es un sector del círculo cuyo radio es el lado del cono, y cuyo arco tiene la misma longitud que la circunferencia de la base de este.

PROBLEMA 52 (*fig.* 191).

Dado un cono troncado ABPS *de bases paralelas, hallar la altura* VC *del cono total, y la* VO *del cono deficiente.*

Supóngase construido el cono entero VAB, y tírese un plano VAC por el eje VC y por un lado VA del cono: las intersecciones PO y AC de este plano con los planos paralelos AB y PS serán paralelas [*Teor.* 128]; luego los triángulos VAC, VPO serán semejantes, y nos darán

$$AC : PO :: VC : VO,$$

de donde [*Aritm.* 175]

$$AC - PO : AC : : VC - VO = OC : VC = \frac{AC \times OC}{AC - PO},$$

$$AC - PO : PO : : VC - VO = OC : VO = \frac{PO \times OC}{AC - PO}.$$

81. Se llama *cilindro* el cuerpo engendrado por un rectángulo $ABOP$ (*fig.* 193) que gira al rededor de uno de sus lados PO.

En este movimiento los lados BO y AP, adyacentes al lado fijo PO, describen dos círculos cuyos centros son los puntos O y P; lo que se demuestra como en [80]. Estos dos círculos son iguales, pues tienen igual radio.

Se llama *eje* del cilindro el lado fijo PO del rectángulo generador.

Bases del cilindro son los círculos BC y AD, que describen los lados del rectángulo generador, adyacentes al eje.

Lado del cilindro es el lado, paralelo eje, del rectángulo generador en cualquiera de las posiciones de este.

Altura del cilindro es la distancia entre las dos bases.

TEOREMA 164 (*fig.* 193).

Toda seccion SVT *paralela á la base del cilindro es un círculo igual á la base, y su centro está en el eje* PO.

Por los lados SB, VR, TC, etc. y por el eje tiro los planos $SBOQ$, $VROQ$, $TCOQ$, etc.: las intersecciones SQ y BO, VQ y RO, TQ y CO serán paralelas; luego los cuadriláteros $SBOQ$, $VROQ$, $TCOQ$ son paralelógramos; luego $SQ = BO$, $VQ = RO$, $TQ = CO$: y pues BO, RO, CO son iguales, tambien SQ, VQ, TQ son iguales; luego la curva SVT, además de ser plana, tiene todos sus puntos á igual distancia del punto O; luego dicha curva es una circunferencia cuyo centro es el punto O. Ahora, como los radios SQ y BO de las dos circunferencias SVT, BRC son iguales, dichas circunferencias son tambien iguales.

TEOREMA 165 (*fig.* 194).

La superficie lateral de un cilindro ABCD *puede desarrollarse en un rectángulo* CDD'C', *cuya base* CC' *es igual en longitud á la circunferencia de la base del cilindro, y cuya altura* CD *es igual á la del cilindro.*

Coloquemos el cilindro de modo que uno de sus lados CD coincida con el plano, y hagamos rodar á este cilindro (sin que resbale) en dicho plano, hasta que el mismo lado CD venga nuevamente á coincidir con el mismo plano en la posicion $C'D'$. En virtud de este movimiento los infinitos lados del cilindro coincidirán sucesivamente con el plano, y la superficie plana $DCD'C'$, formada por todos ellos, será la superficie desarrollada del cilindro. Ahora bien, la base BC del cilindro no se separa en este movimiento de la prolongacion de su posicion primitiva, y por consiguiente los infinitos puntos de su circunferencia, al colocarse sobre el plano, forman una línea recta, la cual es la interseccion de dicha base con el plano. Uno cualquiera $C''D''$ de los infinitos lados del cilindro, al colocarse sobre dicho plano, no deja de ser perpendicular á la base BC, y por consiguiente es perpendicular á la recta CC'' que pasa por su pie en el plano de la base. Lo mismo sucede por la parte superior: luego los lados CD y $C'D'$ son perpendiculares á las rectas CC' y DD'; y como además dichos lados CD y $C'D'$ son iguales, resulta que la superficie $CDC'D'$ es un rectángulo cuya base es igual á la circunferencia BC, y cuya altura es la misma que la del cilindro.

CAPÍTULO II.

Esfera.

82. Se llama *esfera* el cuerpo engendrado por un semicírculo ABC (*fig.* 195) que gira al rededor de uno de sus diámetros AC.

Centro de la esfera es el centro O del semicírculo generador.

Radios de la esfera son las rectas tiradas desde el centro á la superficie de la esfera.

Todos los radios de una esfera son iguales, ó lo que es igual, *todos los puntos de la superficie de la esfera equidistan del centro:* pues los radios de la esfera son los radios del círculo generador en sus diferentes posiciones.

Diámetro de la esfera es la recta que pasa por el centro, y termina por ambos lados en la superficie de la esfera.

Todos los diámetros de una esfera son iguales; pues cada uno se compone de dos radios.

TEOREMA 166 (*fig.* 196 *sin la* OP').

Cortando la esfera por medio de un plano, la seccion AB *que resulta, es un círculo.*

Si el plano secante pasa por el centro de la esfera, la curva de interseccion es una circunferencia: pues todos sus puntos están en dicho plano, y equidistan del centro de lo esfera, por ser puntos de la superficie de esta.

Si el plano secante no pasa por el centro de la esfera, tiro un radio OP perpendicular á dicho plano, y las rectas OA, OB, OD, *OE*, etc. Siendo estas rectas radios de la esfera, son todas iguales; y como son oblícuas al plano *AB*, los puntos *A*, *B*, *D*, *E*, etc. equidistan del pie *C* de la perpendicular *OP*; luego la curva *AB* tiene todos sus puntos en un plano, y á igual distancia del punto *C*; y por tanto dicha curva es una circunferencia.

NOTA. Obsérvese que el centro de esta circunferencia es el pie *C* del diámetro *PP'* perpendicular al plano de la misma.

83. Círculo *máximo* de la esfera es todo círculo cuyo plano pasa por el centro de la esfera; y círculo *menor* es un círculo cualquiera cuyo plano no pasa por el centro.

Es evidente que un círculo máximo queda determinado, siempre que se den dos puntos de la superficie de la esfera por los cuales deba pasar, si estos dos puntos no son estremos de un mismo diámetro.

TEOREMA 167 (*fig.* 195).

Todo círculo máximo BD *divide á la esfera en dos partes iguales* BAD *y* BCD, *llamadas* hemisferios: pues si se coloca la parte *ABD* sobre la *CBD*, de modo que, siendo el círculo *BD* comun á dichas dos partes, el punto *A* caiga hácia el mismo lado de este círculo que el punto *C*, todos los puntos de la superficie *BAD* coincidirán con los de la superficie *CBD*, porque los radios de la esfera son todos iguales.

TEOREMA 168.

Dos círculos máximos de una misma esfera se cortan mútuamente en dos partes iguales: pues, pasando sus planos por el centro de la esfera, la interseccion es un diámetro comun á los dos círculos, el cual divide á cada círculo en dos partes iguales.

*TEOREMA 169 (*fig.* 197).

Cuatro puntos A, B, C, D, *que no están en un mismo plano, determinan la posicion de una esfera.*

Sean *O* y *P* los centros de los círculos circunscriptos á los triángulos *ABC* y *ACD*: levantando las perpendiculares *OR* y *PS* á dichos planos, estas perpendiculares se encontrarán.

En efecto, tiremos las rectas *OG* y *PG* al punto medio de la recta *AC*, comun á los triángulos: estas rectas *OG* y *PG* serán perpendiculares á la *AC* [*Teor.* 24]; luego el plano *OGP* será perpendicular á la *AC*, y por consiguiente á los planos *ABC* y *ACD* [*Teor.* 141]. La recta *OR* perpendicular al plano *ABC* estará contenida en el plano *OGP* [*Teor.* 142, *Recip.*], é igualmente la recta *PS* estará contenida en el plano *OGP*. Ahora, si las dos rectas *OR* y *PS*, que se hallan en un mismo plano, fuesen paralelas, siendo la *GO* perpendicular á la *OR*, seria tambien perpendicular á la *PS* paralela á la *OR*; y por consiguiente desde el punto *G* se podrian tirar dos perpendiculares *GP* y *GO* á la *PS*, lo que es imposible. Las dos rectas *OR* y *PS* están pues en un mismo plano, y se encuentran en un punto *Q*.

Esto supuesto, el punto *Q* equidista de los tres puntos *A*, *B* y *C* [*Teor.* 119], y tambien de los tres puntos *A*, *C* y *D*; luego dicho punto *Q* equidista de los cuatro puntos *A*, *B*, *C* y *D*. Luego la esfera, cuyo centro sea el punto *Q*, y que pase por uno de los cuatro puntos *A*, *B*, *C*, *D*, pasará por los otros tres. Queda asi demostrado que por cuatro puntos, que no están en un plano, puede pasar una esfera.

Demostremos ahora que por dichos cuatro puntos no puede pasar otra esfera diferente de la primera.

Imaginemos que por los cuatro puntos *A*, *B*, *C* y *D* pase otra esfera: el centro de esta nueva esfera deberá hallarse en la perpendicular *OR*; pues si estuviese fuera, la perpendicnlar bajada desde él al plano *ABC* no pasaria por el punto *O* [*Teor.* 114]; y por consiguiente las tres distancias de dicho centro á los puntos *A*, *B*, *C* no serian iguales. Por la misma razon el centro de dicha esfera debe estar en la perpendicular *PS*: luego el centro de esta esfera es el punto *Q*. Luego esta esfera y la primera, que tienen el mismo centro é igual radio, son una misma esfera.

Nota. Si los cuatro puntos dados están en un mismo plano, y corresponden á una misma circunferencia, existirán una infinidad de esferas que pasen por ellos; pues todos los puntos de la perpendicular levantada al círculo en su centro equidistan de todos los puntos de la circunferencia; y por tanto serán centros de dichas esferas.

Si los cuatro puntos están en un mismo plano, y la circunferencia que pasa por tres de ellos, no pasa por el cuarto, la esfera no podrá pasar por dichos cuatro puntos: pues si esto fuere posible, un plano cortaria á la superficie de la esfera por una línea diferente de la circunferencia; lo que es absurdo [*Teor.* 166].

84. Se llaman *polos* de un círculo *AB* (*fig.* 196) de la esfera los dos estremos *P* y *P'* del diámetro *PP'* perpendicular á dicho círculo.

TEOREMA 170 (*fig.* 196).

Cada uno de los polos P *y* P' *de un circulo* AB *de la esfera equidista de todos los puntos de la circunferencia de dicho circulo:* pues si los puntos *P* y *P'* son los polos del círculo *AB*, el diámetro *PP'* es, segun la definicion de estos puntos, perpendicular al plano *AB*, y por consiguiente pasa por el centro del círculo *AB* [*Teor.* 166, *Nota*]; luego las distancias de cada uno de los polos á los diferentes puntos de la circunferencia *AB* son oblicuas que se apartan igualmente del pie *C* de la perpendicular *PP'*, y por tanto son iguales.

TEOREMA 171 (*fig.* 198).

Si desde un punto P *de la superficie de la esfera se traza con una abertura constante de compás* (a) *una curva* BDEC *sobre dicha superficie, esta curva será una circunferencia, de la que el punto* P *será uno de los polos.*

Tiro los radios *OD, OE, OC*, etc. á diferentes puntos de la curva *BDEC;* tiro tambien las rectas *PD, PE, PC*, etc.: los triángulos *POD, POE, POC*, etc. son iguales, por tener sus tres lados respectivamente iguales; luego los ángulos *OPD, OPE, OPC*, etc. son iguales. Tiro ahora desde el punto *D* una perpendicular *DQ* al radio *PO*, y las rectas *EQ, CQ*, etc.: los triángulos *PQD, PQE, PQC*, etc. son iguales [*Teor.* 15]; luego los ángulos *PQD, PQE, PQC*, etc. son iguales; y como el primero de estos ángulos es recto, los otros tambien son rectos, es decir, que las rectas *DQ, EQ, CQ*, etc. son perpendiculares al radio *OP*, y por tanto estas rectas están en un mismo plano [*Teor.* 113]. Luego la curva *BC* tiene todos sus puntos en un plano, y á igual distancia del punto *Q*; luego dicha curva es una circunferencia. Ahora, como la recta *OP* es perpendicular al plano *BC*, se infiere que su estremo *P* es uno de los dos polos del círculo *BDCB*.

85. Se llama plano *tangente* á una esfera el plano que tiene un solo punto comun con la superficie de la esfera.

TEOREMA 172 (*fig.* 199).

Todo plano AB *perpendicular al radio* OC *en el punto en que este corta á la superficie de la esfera, es tangente á la esfera.*

Siendo el radio *OC* perpendicular al plano *AB*, es menor que cualquiera otra recta *OD* tirada desde el centro al plano *AB* [*Teor.* 118]; luego el punto *D* está fuera de la esfera: todos los puntos del plano *AB* están, segun esto, fuera de la esfera, escepto el punto *C*; luego el plano *AB* es tangente á la esfera.

Recíproco. *El plano* AB *tangente á una esfera es perpendicular al radio* OC *tirado al punto de contacto.*

Siendo el plano *AB* tangente á la esfera, tiene todos sus puntos fuera de la esfera, escepto el punto *C*; luego el radio *OC* es la línea mas corta que se puede tirar desde el centro al plano

---

(*a*) El compás debe ser de los modernos, cuyas puntas pueden doblarse.

tangente; luego [*Teor.* 118, *Recip.*] el radio *OC* es perpendicular al plano tangente *AB*.

Corolario. *Por un punto de la superficie de la esfera no se puede tirar mas que un solo plano, que sea tangente á la esfera*; puesto que el plano tangente es perpendicular al radio, y que por un punto de una recta no se puede tirar mas que un solo plano perpendicular á ella.

86. Se llama *ángulo esférico* la separacion ó abertura de dos arcos *AB* y *AD* (*fig.* 200) de círculo máximo.

Lados del ángulo esférico son los dos arcos que lo forman.

Vértice de un ángulo esférico es el punto de interseccion de los lados.

El valor de un ángulo esférico *BAD* se aprecia por el del ángulo rectilíneo *SAT* formado por dos tangentes *AS* y *AT* tiradas á los arcos *AB* y *AD* en el vértice de dicho ángulo (*a*).

Segun esto, el ángulo esférico *BAD* y el ángulo diedro *BACD* formado por los planos de los arcos del primero, tienen la misma medida; pues el ángulo *SAT* es el ángulo plano correspondiente al diedro *BACD*.

87. Se llama *triángulo esférico* la porcion *ABC* (*fig.* 201, 1.ª) de superficie de esfera comprendida entre tres arcos *AB*, *AC*, *BC* de círculo máximo, menores que media circunferencia.

Lados del triángulo esférico son los arcos de círculo máximo que lo forman.

Angulo triedro *correspondiente* á un triángulo esférico es el triedro *OABC* formado por los radios *OA*, *OB*, *OC* tirados á los vértices del triángulo. Por el contrario, el triángulo esférico *ABC* se llama triángulo esférico *correspondiente* al triedro *OABC*.

Los lados del triángulo esférico son las medidas de los ángulos planos del triedro correspondiente, y los ángulos del triángulo esférico son las medidas de los ángulos diedros de dicho triedro [86].

TEOREMA 173 (*fig.* 201, 1.ª).

Un lado cualquiera AB *de un triángulo esférico* ABC *es menor que la suma de los otros dos*: pues en el triedro *OABC*, correspondiente al triángulo esférico *ABC*, es

$$AOB < AOC + BOC;$$

luego, reemplazando estos ángulos por sus medidas, será

$$AB < AC + BC.$$

(*a*) El valor de un ángulo curvilíneo se aprecia siempre por el ángulo rectilíneo formado por las tangentes á las dos curvas en su punto de interseccion.

Corolario. *Un lado cualquiera de un triángulo esférico es mayor que la diferencia de los otros dos*: pues siendo

$$AC + CB > AB,$$

será

$$AC > AB - CB, \text{ y } CB > AB - AC.$$

TEOREMA 174 (*fig.* 201, 1.ª).

La suma de los lados de un triángulo esférico es menor que una circunferencia máxima: pues siendo

$$AOB + AOC + BOC < 4R \text{ [Teor. 149]},$$

será, llamando C á la circunferencia máxima, y reemplazando los ángulos de esta igualdad por sus medidas,

$$AB + AC + BC < C.$$

*88. Dos triángulos esféricos se llaman *suplementarios*, cuando los lados de cada uno son suplementos de los ángulos del otro.

* TEOREMA 175 (*fig.* 202).

A todo triángulo esférico ABC *corresponde otro suplementario* DEF.

Sea $O'DEF$ el triedro suplementario del triedro $OABC$ [*Teorema* 154], y DEF el triángulo esférico correspondiente á dicho triedro O'. Siendo suplementarios los triedros O y O', tendremos [71] las igualdades siguientes:

$$\begin{array}{l|l} AOB + EO'DF = 2R, & DO'E + BOAC = 2R, \\ AOC + DO'EF = 2R, & DO'F + AOBC = 2R, \\ BOC + DO'FE = 2R, & EO'F + AOCB = 2R. \end{array}$$

Poniendo en estas igualdades en vez de los ángulos diedros los ángulos de los dos triángulos esféricos, y en vez de los ángulos planos los lados de dichos triángulos, tendremos

$$\begin{array}{l|l} AB + D = 2R, & DE + A = 2R, \\ AC + E = 2R, & DF + B = 2R, \\ BC + F = 2R, & EF + C = 2R; \end{array}$$

luego los dos triángulos esféricos ABC y DEF son suplementarios.

* TEOREMA 176.

La suma de los ángulos de un triángulo esférico es mayor que dos rectos y menor que seis.

Repítase la demostracion del teorema 155, análogo al actual.

Corolario. *La diferencia que hay entre la suma de dos ángulos de un triángulo esférico y el tercer ángulo es menor que dos rectos*; pues si llamamos a', b', c' á los tres lados del triángulo suplementario del propuesto, suplementos respectivos de los ángulos A, B y C, tendremos, segun queda demostrado,

$a' < b' + c'$, ó $180° - A < 180° - B + 180° - C$, ó $B + C - A < 180°$.

* 80. Segun el teorema 176, puede existir un triángulo esférico que tenga dos ángulos rectos, los tres ángulos rectos, dos ángulos obtusos y aun los tres obtusos. El triángulo esférico que tiene un ángulo recto, se llama triángulo esférico *rectángulo*; el que tiene dos ángulos rectos, *bi-rectángulo*; y el que tiene sus tres ángulos rectos, *tri-rectángulo*. Los ángulos no rectos de un triángulo esférico se llaman ángulos *oblicuos*.

En el triángulo esférico rectángulo los lados que forman el ángulo recto, se llaman *catetos*, y el lado opuesto al ángulo recto se llama *hipotenusa*.

*TEOREMA 177 (*fig*. 203).

En todo triángulo bi-rectángulo: 1.° el vértice del ángulo oblicuo es polo del lado opuesto; 2.° el ángulo en el polo tiene por medida su lado opuesto.

Sea el triángulo ABC bi-rectángulo en A y C: digo que el punto B es polo del lado AC, y que el ángulo ABC tiene por medida el lado opuesto AC.

1.° Construyo el triedro $OABC$ correspondiente al triángulo esférico ABC. Siendo rectos los ángulos esféricos BAC y BCA, ó los ángulos diedros $BAOC$ y $BCOA$, los planos ABO y COB son perpendiculares al plano AOC; luego [*Teor*. 143] la interseccion BO es perpendicular al plano AOC, y por tanto el punto B es polo del arco AC.

2.° Siendo la recta OB perpendicular al plano AOC, será perpendicular á las rectas AO y OC; luego el ángulo AOC es el ángulo plano correspondiente al diedro $AOBC$, y por tanto es la medida de este; y como el arco AC es la medida del ángulo AOC, se infiere que el arco AC es la medida del ángulo diedro $AOBC$, ó del ángulo esférico ABC.

NOTA. La segunda parte de este teorema puede enunciarse asi: *La medida de un ángulo esférico es el arco del circulo máximo descrito desde su vértice como el polo, y comprendido entre sus lados.*

*TEOREMA 178.

1.° *Si un triángulo esférico tiene dos ángulos iguales, los lados opuestos son tambien iguales.*

2.° *Si un triángulo esférico tiene dos ángulos desiguales, al mayor se opone mayor lado.*

Este teorema se demostrará fácilmente, construyendo los triedros correspondientes á ambos triángulos, y aplicando á estos triedros el teorema 157.

Recíproco. 1.º *En todo triángulo esférico isósceles los ángulos opuestos á los lados iguales son iguales.*

2.º *En todo triángulo esférico á mayor lado se opone mayor ángulo* [20].

*80. Se llaman triángulos esféricos *simétricos* los triángulos esféricos de una misma esfera ó de esferas iguales correspondientes á dos triedros simétricos.

Segun esto, dos triángulos esféricos simétricos tienen sus seis elementos respectivamente iguales, pero no pueden coincidir en general; pues los triedros correspondientes, siendo simétricos, tienen sus seis elementos respectivamente iguales, y no pueden coincidir cuando cada uno tiene sus tres ángulos diedros desiguales [*Teor.* 150].

* TEOREMA 179 (*fig.* 201).

Dos triángulos ABC, DEF *de una misma esfera ó de esferas iguales son iguales, cuando tienen dos lados respectivamente iguales,* AB = DE, AC = DF, *igualmente dispuestos, é igual el ángulo comprendido*, A = D.

Los triedros *OABC*, *PDEF* correspondientes á dichos triángulos tienen iguales los ángulos planos *AOB* y *DPE*, *AOC* y *DPF*, y el ángulo diedro *BAOC* = *EDPF*; luego [*Teor.* 151] dichos triedros son iguales, y por consiguiente los dos triángulos esféricos *ABC*, *DEF* correspondientes á dichos triángulos son tambien iguales.

* TEOREMA 180 (*fig.* 201).

Dos triángulos ABC, DEF *de una misma esfera ó de esferas iguales son iguales, cuando tienen un lado igual,* AC = DF, *adyacente á dos ángulos respectivamente iguales*, A = D, C = F, *é igualmente dispuestos.*

* TEOREMA 181 (*fig.* 201).

Dos triángulos ABC, DEF *de una misma esfera ó de esferas iguales son iguales, cuando tienen sus tres lados respectivamente iguales,* AB = DE, AC = DF, BC = EF, *é igualmente dispuestos.*

* TEOREMA 182 (*fig.* 201).

Dos triángulos ABC, DEF *de una misma esfera ó de esferas iguales son iguales, cuando tienen sus tres ángulos respectivamente iguales,* A = D, B = E, C = F, *é igualmente dispuestos.*

Estos tres últimos teoremas se demostrarán fácilmente, como se ha demostrado el 179, valiéndose de sus análogos los teoremas 152, 153 y 156.

NOTA. Si en cualquiera de los cuatro teoremas últimos las partes respectivamente iguales de los dos triángulos tienen disposicion contraria, las partes respectivamente iguales de los triedros correspondientes tendrán tambien disposicion contraria, y por tanto dichos triedros serán simétricos [*Teors.* 151, 152, 153 *y* 156, *Nota*], como tambien los dos triángulos esféricos: por lo tanto estos dos triángulos no pueden coincidir en general. Pero si uno de ellos es isósceles, el triedro correspondiente tendrá dos ángulos planos iguales, y por consiguiente dos ángulos diedros iguales [*Teor.* 157, *Recip.* 1.°], en cuyo caso los triedros simétricos pueden coincidir, y por consiguiente pueden coincidir los dos triángulos. Luego *dos triángulos esféricos simétricos son iguales, cuando uno de ellos es isósceles.*

*TEOREMA 183 (*figs.* 204 *y* 205).

La linea mas corta, que se puede tirar en la superficie de una esfera entre dos puntos de la misma, es el arco menor de circulo máximo que pasa por ellos.

Demostremos primeramente que *en un poligono esférico* ABCDE (fig. 204) *formado por arcos de circulo máximo, cada lado es menor que la suma de todos los demás.*

Tiremos los arcos de círculo máximo AC y AD, que dividan al polígono esférico en triángulos esféricos; y tendremos

[*Teor.* 173] $$AB < BC + AC,$$
$$AC < CD + AD,$$
$$AD < DE + EA:$$

sumando ordenadamente estas desigualdades, y quitando de los dos miembros de la desigualdad que resulta, las partes comunes AD y AC, será $AB < BC + CD + DE + EA$.

Pasemos ahora á la demostracion del teorema.

Imaginemos dividida la curva ACB (*fig.* 205) en un número cualquiera de partes, y juntemos los dos estremos de cada una de estas partes por un arco de círculo máximo: estos arcos de círculo máximo formarán una línea, que podrá llegar á confundirse sensiblemente con la curva ACB, con tal que las partes en que se divida esta, sean suficientemente pequeñas: por lo tanto la diferencia entre las longitudes de ambas líneas podrá llegar á ser menor que cualquiera cantidad dada. Ahora bien, segun el teorema preparatorio, en el polígono esférico formado por el arco de círculo máximo AaB y por la suma de los arcos de círculo máximo correspondientes á las partes de la curva ACB, el lado AaB

es menor que dicha suma; luego, como entre esta suma y la curva *ACB* la diferencia puede ser menor que cualquiera cantidad dada, será tambien el arco *AaB* menor que la curva *ACB*.

PROBLEMA 53 (*fig.* 206).

Dada una esfera O, *hallar su radio por medio de una construccion geométrica.*

Desde un punto cualquiera *P* de la superficie de la esfera como polo se describe una circunferencia cualquiera *AB* [*Teor.* 171]; se señalan tres puntos en esta circunferencia, y se construye un triángulo cuyos tres lados sean las tres cuerdas que unen dichos tres puntos, y se circunscribe un círculo á este triángulo. Se construye en seguida un triángulo rectángulo *MQN*, cuya hipotenusa *MQ* sea igual á la distancia *PA*, y el cateto *MN* igual al radio del círculo circunscripto; en el medio de la *MQ* se levanta una perpendicular *EC* hasta que encuentre en *C* al cateto *QN*, prolongado si es preciso: la recta *QC* será igual al radio de la esfera.

Para demostrarlo, tiremos la cuerda *PA*, el radio *AD* del círculo *AB*, y desde el centro *O* la perpendicular *OR* á la *PA*. El triángulo, cuyos tres lados son las tres cuerdas que unen los tres puntos tomados sobre la circunferencia *AB*, es igual al triángulo formado por dichas cuerdas; luego colocado uno sobre otro coincidirian; y como á un triángulo no se puede circunscribir mas que un solo círculo [*Teor.* 39], se infiere que el círculo circunscripto al triángulo es igual al círculo *AB*; luego la recta *MN*, igual al radio de dicho círculo, es tambien igual al radio *AD* del círculo *AB*. Luego los dos triángulos rectángulos *APD* y *MNQ* son iguales, y por consiguiente el ángulo *APD* es igual al ángulo *MQN*. Luego los dos triángulos rectángulos *PRO* y *QEC*, que tienen iguales los lados *RP* y *EQ* adyacentes á ángulos respectivamente iguales, son iguales; luego $CQ = OP$.

LIBRO CUARTO.

POLIEDROS SEMEJANTES, Y REGULARES.

CAPÍTULO I.

Poliedros semejantes.

---

91. Se llaman poliedros *semejantes* los poliedros cuyos ángulos diedros colocados en el mismo órden son iguales, y cuyas caras adyacentes á estos ángulos diedros iguales son semejantes.

En los poliedros semejantes se llaman caras *homólogas* las caras adyacentes á ángulos diedros respectivamente iguales y colocados en el mismo órden.

TEOREMA 184 (*fig.* 187, *sin las lineas* VO, BO, GP, AC, AD, FH *y* FI).

Si en una pirámide VABCDE *se tira un plano* FGHIK *paralelo á la base, la pirámide parcial* VFGHIK *que resulta, es semejante á la pirámide propuesta.*

En efecto, los ángulos diedros *VA* y *VF* son iguales, pues son uno mismo; y por la misma razon son iguales respectivamente todos los ángulos diedros cuyas aristas son las aristas laterales de la pirámide. Los ángulos diedros de las bases *ABCDE*, *FGHIK* son iguales respectivamente, por ser correspondientes entre planos paralelos [*Teor.* 146].

Las caras laterales *VFG* y *VAB* son semejantes, por ser la *FG* paralela á la *AB*, y por igual razon las otras caras laterales son respectivamente semejantes. Las dos bases son semejantes [*Teor.* 158]. Luego las dos pirámides *VABCDE* y *VFGHIK* son semejantes, pues sus ángulos diedros, colocados en el mismo órden, son iguales, y sus caras adyacentes á estos ángulos diedros iguales son semejantes.

TEOREMA 185 (*fig.* 207).

Dos tetraedros VABC, vabc *son semejantes, cuando tienen dos* *caras respectivamente semejantes* VAB *y* vab, VAC *y* vac, *semejantemente dispuestas, é igual el ángulo diedro comprendido.*

Coloco el triedro *vabc* sobre el *VABC* en la posicion *VDEF*, es decir, de modo que el vértice *v* caiga sobre el *V*, y el ángulo diedro *bavc* coincida con su igual *BAVC*. Siendo semejantes por suposicion las caras *VDE* y *VAB*, *VDF* y *VAC*, las rectas *DE* y *DF* serán paralelas á las *AB* y *AC;* y por tanto [*Teor.* 130] el plano *DEF* es paralelo á la base *ABC:* luego, segun el teorema anterior, el tetraedro *VDEF*, ó su igual el *vabc*, es semejante al *VABC*.

TEOREMA 136 (*fig.* 187).

Las bases ABCDE *y* FGHIK *de dos pirámides semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus alturas* VO *y* VP.

En efecto, siendo semejantes las bases *ABCDE* y *FGHIK*, tendremos $ABCDE : FGHIK :: AB^2 : FG^2.$

Los triángulos semejantes *VAB* y *VFG*, *VBO* y *VGP* nos dan

$$AB : FG :: VB : VG :: VO : VP;$$

luego $ABCDE : FGHIK :: VO^2 : VP^2.$

Nota. *Las alturas* VO *y* VP *de las dos pirámides semejantes son proporcionales á sus aristas homólogas.*

Corolario. *Si en dos pirámides* ABCD *y* EFGHI (fig. 208) *de bases equivalentes* BCD *y* FGHI, *é igual altura*, AO = EP, *se tiran dos planos paralelos á las bases, y á igual distancia de sus vértices*, Ao = Ep, *las secciones* bcd *y* fghi *que resultan, son equivalentes.*

Acabamos de demostrar que

$$BCD : bcd :: AO^2 : Ao^2,$$
$$FGHI : fghi :: EP^2 : Ep^2;$$

y como por suposicion $BCD = FGHI$, $AO = EP$, $Ao = Ep$, resulta $bcd = fghi$, es decir que estas dos bases son iquivalentes.

* TEOREMA 187 (*fig.* 209).

Dos poliedros, compuestos de un mismo número de tetraedros respectivamente semejantes y semejantemente dispuestos, son semejantes.

Sean los dos poliedros *ABCDEFG* y *abcdefg* compuestos de los tetraedros *GABC*, *GAGD*, *GADE*, *GBCF* (*a*); *gabc*, *gaed*, *gade*,

---

(*a*) Para ver con claridad que estos cuatro tetraedros componen el poliedro *ABCDEFG*, imagínese que por los tres puntos *G*, *B* y *C* se tira un plano, y se separa del poliedro el tetraedro *GBCF*: quedará la pirámide pentagonal *GABCDE*, que evidentemente se compone de los tres tetraedros *GABC*, *GACD* y *GADE*.

gbcf respectivamente semejantes: digo que estos poliedros son semejantes.

Los ángulos diedros *AB* y *ab* son iguales, porque son ángulos diedros de los dos tetraedros semejantes y semejantemente dispuestos *GABC* y *gabc*.

El ángulo diedro *BAGE* se compone de los diedros *BAGC*, *CAGD* y *DAGE*, y el ángulo diedro *bage* se compone de los diedros *bagc*, *cagd* y *dage;* y siendo estos diedros parciales respectivamente iguales, por corresponder á tetraedros respectivamente semejantes y semejantemente dispuestos, los diedros *BAGE* y *bage* serán iguales.

Del mismo modo se demuestra que todos los demás ángulos diedros de los poliedros son respectivamente iguales.

Las caras *AGE* y *age* son semejantes, por corresponder á los tetraedros semejantes y semejantemente dispuestos *GADE* y *gade*. Las caras *ABCDE* y *abcde* son semejantes, porque los triángulos *ABC* y *abc*, *ACD* y *acd*, *ADE* y *ade*, que las componen, tienen la misma disposicion, y son respectivamente semejantes, por ser caras de tetraedros respectivamente semejantes y semejantemente dispuestos.

Del mismo modo se demuestra que las demás caras de los poliedros son respectivamente semejantes.

Luego [91] los dos poliedros *ABCDEFG* y *abcdefg*, que tienen iguales los ángulos diedros colocados en el mismo órden, y semejantes las caras adyacentes á estos ángulos diedros respectivamente iguales, son semejantes.

* Recíproco. *Dos poliedros semejantes pueden descomponerse en tetraedros respectivamente semejantes y semejantemente dispuestos.*

Sean los dos poliedros semejantes *ABCDEFG* y *abcdefg*, siendo semejantes las caras *ABCDE* y *abcde*, *ABFG* y *abfg*, *GAE* y *gae*, etc., que tienen la misma disposicion, y siendo iguales los diedros *FABC* y *fabc*, *BAGE* y *bage*, etc. que tambien tienen la misma disposicion. Tiremos desde los vértices *G* y *g* de dos ángulos poliedros formados por caras respectivamente semejantes las rectas *GB* y *GC*, *gb* y *gc*, de modo que las caras, que componen dichos ángulos poliedros *G* y *g*, estén todas descompuestas en triángulos. Dividamos tambien en triángulos semejantemente dispuestos las otras caras que no forman estos ángulos poliedros *G* y *g*. El poliedro *ABCDEFG* quedará descompuesto en los tetraedros *GABC*, *GACD*, *GADE* y *GBCF*, y el poliedro *abcdefg* quedará descompuesto en los tetraedros *gabc*, *gacd*, *gade* y *gbcf:* digo que estos tetraedros son respectivamente semejantes.

En efecto, los tetraedros *GABC* y *gabc* tienen semejantes las caras *GAB* y *gab*, las *ABC* y *abc* [*Teor*. 65, *Recip*.], é iguales por suposicion los ángulos diedros comprendidos *GABC* y *gabc;* luego [*Teor*. 185] estos tetraedros son semejantes.

Los tetraedros *GACD* y *gacd* tienen semejantes las caras *GAC* y *gac*, por corresponder á los tetraedros semejantes *GABC* y *gabc*, y tambien tienen semejantes las caras *CAD* y *cad*, é iguales los diedros *GACD* y *gacd*, como suplementos de los iguales *GACB* y *gacb;* luego dichos tetraedros *GACD* y *gacd* son semejantes.

Del mismo modo se demuestra que todos los demás tetraedros semejantemente dispuestos son semejantes.

92. En dos poliedros semejantes se llaman aristas *homólogas* los lados homólogos de las caras homólogas.

TEOREMA 188 (*fig*. 209).

Las aristas homólogas de dos poliedros semejantes son proporcionales.

Sean *AB* y *GD* dos aristas cualesquiera del primer poliedro, *ab* y *gd* sus homólogas: digo que

$$AB : ab :: GD : gd.$$

En efecto, por ser semejantes los poliedros, las caras homólogas *ABFG* y *abfg*, *AEG* y *aeg*, *EGD* y *egd* son semejantes; y por tanto

$AB : ab :: AG : ag$, $AG : ag :: EG : eg$, $EG : eg :: DG : dg$;

luego $AB : ab :: DG : dg$.

CAPÍTULO III.

Poliedros regulares.

93. Se dice que una pirámide está *inscripta* en un cono, ó que un cono está *circunscripto* á una pirámide, cuando el vértice de la pirámide es el mismo que el del cono, y la base de la pirámide está inscripta en la base del cono.

Se dice que una pirámide está *circunscripta* á un cono, ó que un cono está *inscripto* en una pirámide, cuando el vértice de la pirámide es el mismo que el del cono, y la base de la pirámide está circunscripta á la base del cono.

Se dice que un prisma está *inscripto* en un cilindro, ó que un cilindro está *circunscripto* á un prisma, cuando las dos bases del prisma están inscriptas en las dos bases del cilindro.

Se dice que un prisma está *circunscripto* á un cilindro, ó que un cilindro está *inscripto* en un prisma, cuando las dos bases del prisma están circunscriptas á las dos bases del cilindro.

Se llama poliedro *regular* el poliedro cuyas caras son todas polígonos regulares é iguales, y cuyos ángulos diedros son todos iguales.

TEOREMA 189.

No hay mas que cinco poliedros regulares.

En efecto, para formar un ángulo sólido, es menester por lo menos tres ángulos planos, y que además la suma de los ángulos planos que han de formar el ángulo sólido, valga menos que cuatro rectos [*Teor.* 149].

Esto supuesto, con tres ángulos de triángulo equilátero, cuya suma es $2R$, se puede formar ángulo sólido: el poliedro correspondiente tiene cuatro triángulos equiláteros por caras, y se llama *tetraedro regular* (fig. 210).

Con cuatro ángulos de triángulo equilátero, cuya suma es $\frac{8}{3}R$, se puede formar ángulo sólido: el poliedro correspondiente tiene ocho triángulos equiláteros por caras, y se llama *octaedro regular* (fig. 211)

Con cinco ángulos de triángulo equilátero, cuya suma es $\frac{10}{3}R$, se puede formar ángulo sólido: el poliedro correspondiente tiene veinte triángulos equiláteros por caras, y se llama *icosaedro regular* (fig. 212).

Con seis ángulos de triángulo equilátero, cuya suma es $\frac{12}{3}R = 4R$, no se puede formar ángulo sólido.

Con tres ángulos de cuadrado, cuya suma es $3R$, se puede formar ángulo sólido: el poliedro correspondiente tiene seis cuadrados por caras, y se llama *exaedro regular* ó cubo (*fig.* 213).

Con cuatro ángulos de cuadrado, cuya suma es $4R$, no se puede formar ángulo sólido.

Con tres ángulos de pentágono regular se puede formar ángulo sólido, porque la suma de los cinco ángulos de un pentágono es igual á $6R$ [*Teor.* 26]; luego un ángulo de un pentágono regular valdrá $\frac{6}{5}R$; y por consiguiente tres ángulos de pentágono regular valdran $\frac{18}{5}R$. El poliedro correspondiente tiene doce pentágonos regulares por caras, y se llama *dodecaedro regular* (fig. 214).

Con cuatro ángulos de pentágono regular, cuya suma es $\frac{24}{5}R$, no se puede formar ángulo sólido.

Con tres ángulos de exágono regular no se puede formar ángulo sólido; pues valiendo los seis ángulos del exágono regular $8R$, un solo ángulo del exágono regular valdrá $\frac{8R}{6} = \frac{4}{3}R$; y por consiguiente tres ángulos de exágono regular valdrán $\frac{12}{3}R = 4R$.

Ahora bien, cuanto mayor sea el número de lados de un polígono regular, tanto mayor es el valor de cada uno de sus ángulos, pues si n es el número de lados del polígono, y por consiguiente tambien n el número de sus ángulos, $2R(n-2) = 2Rn - 4R$ será el valor de la suma de todos; luego $\frac{2Rn-4R}{n} = 2R - \frac{4R}{n}$ será el valor de un solo ángulo. Creciendo n, disminuye el quebrado sustraendo $\frac{4R}{n}$, y por tanto la diferencia $2R - \frac{4R}{n}$ aumenta. Si pues la suma de tres ángulos de exágono regular vale $4R$, la suma de tres ángulos de eptágono regular, octógono regular, etc. será mayor que $4R$; y por consiguiente no se podrá formar ángulo sólido.

Queda asi demostrado, que no pueden existir mas poliedros regulares que el tetraedro, octaedro, icosaedro, exaedro y dodecaedro.

LIBRO QUINTO.

AREAS Y VOLÚMENES DE LOS POLIEDROS Y CUERPOS REDONDOS.

CAPÍTULO I.

Áreas de los poliedros.

TEOREMA 190.

El área lateral de una pirámide regular es igual á la mitad del producto del perimetro de su base por la altura de uno de los triángulos laterales.

Sea a la altura de uno de los triángulos laterales, b su base y n el número de estos triángulos; nb será el perímetro de la base de la pirámide: digo que el área lateral de la pirámide es $\frac{1}{2}nb \times a$.

El área de uno de los triángulos laterales es $\frac{1}{2}ba$; y como todos estos triángulos son iguales [74], el área de todos, ó la lateral de la pirámide, será $\frac{1}{2}ba \times n = \frac{1}{2}nb \times a$.

TEOREMA 191.

El área lateral de una pirámide regular troncada de bases paralelas es igual al producto de la altura de uno de los trapecios laterales por la semisuma de los perímetros de las dos bases.

Sea a la altura de uno de los trapecios laterales, b y b' sus dos bases, n el número de estos trapecios, nb y nb' serán los perímetros de las dos bases de la pirámide troncada: digo que el área lateral de esta pirámide troncada es $a \times \dfrac{nb + nb'}{2}$.

El área de uno de los trapecios laterales es $a.\dfrac{b + b'}{2}$; luego, como todos ellos son iguales, el área lateral del tronco será $a.\dfrac{b + b'}{2} \times n = a \times \dfrac{nb + nb'}{2}$.

TEOREMA 192.

El área lateral de un prisma recto es igual al producto de su altura por el perímetro de su base.

Sea a la altura del prisma recto, y b, b', b'', etc. las bases de los rectángulos laterales; $b + b' + b'' +$ etc. será el perímetro de la base del prisma: digo que la área lateral de este es $a(b + b' + b'' +$ etc.).

Las áreas de los rectángulos laterales son ab, ab', ab'', etc.: luego el área lateral del prisma será $ab + ab' + ab'' +$ etc. $=$ $a(b + b' + b'' +$ etc.).

TEOREMA 193 (*fig.* 215).

El área lateral de un prisma oblicuo FC *es igual al producto de una de sus aristas laterales* AF *por el perímetro de su seccion recta* LMNOP.

Considerando como bases de los paralelógramos laterales las aristas AF, BG, CH, etc., los lados LM, MN, NO, etc. serán las alturas de dichos paralelógramos, puesto que dichas aristas son perpendiculares á la seccion recta, y por consiguiente á las rectas que pasan por su pie en el plano de esta seccion. El área del paralelógramo $ABGF$ es $AF \times LM$, la del paralelógramo $BCHG$ es $BG \times MN = AF \times MN$, la del paralelógramo $DCHI$ es $CH \times NO = AF \times NO$, etc.: luego el área lateral del prisma es

$$AF \times LM + AF \times MN + AF \times NO + \text{etc.} = AF(LM + MN + NO + \text{etc.}),$$

conforme al enunciado del teorema.

NOTA. El área de un poliedro cualquiera se halla sumando las áreas de todas sus caras.

CAPÍTULO II.

Areas de los cuerpos redondos.

TEOREMA 194 (*fig.* 216).

El área lateral de un cono es igual á la mitad del producto de su lado por la circunferencia de su base.

Sea c la circunferencia de la base del cono, l su lado, A su área lateral: digo que $A = \frac{1}{2}cl$.

Sea p el perímetro de la base de una pirámide regular inscripta en el cono, a la altura VF de uno de los triángulos laterales

VBD de esta pirámide, X la área lateral de la misma pirámide: tendremos [*Teor.* 190]

$$X = \tfrac{1}{2}ap.$$

Ahora, puesto que la circunferencia c es el límite del perímetro p, y el lado $VE = l$ es el límite del lado $VF = a$, será $\frac{1}{2}lc$ el límite de $\frac{1}{2}ap$; y el área A lateral del cono es el límite del área lateral X de la pirámide: luego

$$A = \tfrac{1}{2}lc \text{ (a)}.$$

NOTA. Siendo $c = 2\pi r$, será $A = \pi rl$, relacion que puede servir para hallar cualquiera de las tres cantidades A, r y l, dadas las otras dos.

TEOREMA 195 (*fig.* 217).

El área lateral de un cono troncado de bases paralelas es igual al producto de su lado por la semisuma de las circunferencias de sus dos bases.

Cortemos un cono VCD por medio de un plano AB paralelo á la base: sea A el área lateral del cono troncado $ABCD$, l su lado AC, C y c las circunferencias de sus dos bases: digo que $A = l \times \dfrac{C+c}{2}$.

Por el punto D levanto una perpendicular al lado VD, tomo sobre ella una parte $DE = C$, tiro la VE, y por el punto B una paralela BF á la DE. Los triángulos semejantes VDE, VBF nos dan la proporcion

$$DE : BF :: DV : BV \ldots\ldots\ldots [1]:$$

tenemos tambien $\quad C : c :: OD : PB,$

y $\quad OD : PB :: DV : BV;$

luego $\quad C : c :: DV : BV.$

Esta proporcion y la [1] tienen tres términos respectivamente iguales; luego $BF = c$.

Ahora, el área lateral del cono VCD es $\frac{1}{2} VD \times C$, y la del triángulo VDE es $\frac{1}{2} VD \times DE$; luego estas dos áreas son iguales. Del mismo modo se demuestra que el área lateral del cono VAB es igual á la del triángulo VBF. Luego el área lateral del cono troncado $ABCD$ es igual á la del trapecio $BDEF$: el área de este trapecio es $BD \times \dfrac{DE+BF}{2}$; luego la área lateral del cono tron-

(a) *Otra demostracion.* Hemos visto [*Teor.* 163] que la superficie lateral del cono equivale á la de un sector circular, cuyo radio es el lado l del cono, y cuyo arco tiene la misma longitud que la circunferencia de la base del cono: luego la área de la superficie lateral del cono es igual á la área de dicho sector; es decir, $A = \frac{1}{2}\, cl$ [*Teor.* 98].

cado será esta misma, ó $BD \times \frac{C+c}{2}$; y pues hemos llamado A al área lateral del cono, y l á su lado, será $A = l \times \frac{C+c}{2}$.

Nota 1.ª Sea C' la circunferencia GH, que resulta cortando el cono por medio de un plano paralelo á las bases, tirado por el punto medio G del lado AC: tiro por el punto H una paralela HI á la DE; y se demostrará como antes que $HI = C'$. Mas [*Teorema* 55] $HI = \frac{DE + BF}{2}$; luego $C' = \frac{C+c}{2}$; y por consiguiente $A = l \times C'$.

Luego *el área lateral de un cono troncado de bases paralelas es igual al producto de su lado por la circunferencia de una seccion paralela á las bases y equidistante de ellas.*

Nota 2.ª Si llamamos R y r á los radios de las circunferencias C y c, será $C = 2\pi R$, $c = 2\pi r$; luego

$$A = \pi l(R + r),$$

ecuacion que sirve para hallar cualquiera de las cuatro cantidades A, l, R y r, dadas las otras tres.

TEOREMA 196.

El área lateral de un cilindro es igual al producto de la circunferencia de su base por su altura.

Sea A el área lateral del cilindro, a su altura, c la circunferencia de su base: digo que $A = ca$.

Sea p el perímetro de la base de un prisma regular inscripto en el cilindro, X su área lateral: tendremos $X = pa$; y pasando á los límites, $A = ca$ (*a*).

Nota. Siendo $C = 2\pi r$, será $A = 2\pi ra$, ecuacion que sirve para hallar cualquiera de las tres cantidades A, r y a, dadas las otras dos.

TEOREMA 197 (*fig.* 218) (*b*).

Si un triángulo isósceles ABC *gira al rededor de una recta* MN *esterior á él, y que pasa por su vértice en su plano, el área de la superficie engendrada por la base* AC *es igual á su proyeccion* DC *ó* DE *sobre el eje* MN *multiplicada por la circunferencia cuyo radio es la altura* BG.

(*a*) *Otra demostracion*. Hemos visto [*Teor.* 165] que la superficie lateral del cilindro equivale á la de un rectángulo, cuya altura es la del cilindro, y cuya base tiene la misma longitud que la circunferencia de la base del cilindro; luego la área de la superficie lateral del cilindro es igual á la de dicho rectángulo; es decir, $A = ac$.

(*b*) Preparatorio para llegar al área de la zona.

Hay que considerar tres casos: 1.° que la base AC (*fig.* 1) del triángulo isósceles tenga uno de sus estremos en el eje MN; 2.° que la base AC (*fig.* 2) del triángulo isósceles no tenga ningun punto comun con el eje MN ni sea paralela á él; 3.° que la base AC (*fig.* 3) del triángulo isósceles sea paralela al eje MN.

1.° La base AC (*fig.* 1) del triángulo isósceles ABC describe en su movimiento la superficie lateral de un cono, cuya área es [*Teor.* 194]

$$AC \times \pi AD = CG \times 2\pi AD \qquad [1].$$

Los triángulos ADC y BCG son semejantes; luego

$$CG : CD :: BG : AD,$$

de donde

$$CG \times AD = CD \times BG.$$

Sustituyendo en la espresion [1] del área lateral del cono en lugar de $CG \times AD$ su igual $CD \times BG$, resulta que dicha área es $CD \times 2\pi BG$, conforme á la conclusion del teorema.

2.° La base AC (*fig.* 2) describe en su movimiento al rededor del eje MN la superficie lateral de un cono troncado, cuyas bases paralelas tienen por radios AD y CE. La área lateral de este cono es [*Teor.* 195, *Nota* 1.ª]

$$AC \times 2\pi GH \qquad [1].$$

Si tiramos la CI perpendicular á la AD, los triángulos BGH y ACI, cuyos lados son respectivamente perpendiculares, son semejantes; y por tanto

$$AC : BG :: CI = DE : GH,$$

de donde resulta

$$AC \times GH = BG \times DE.$$

Sustituyendo en la espresion [1] del área del cono troncado en lugar de $AC \times GH$ su igual $BG \times DE$, resulta que dicha área es $DE \times 2\pi BG$, conforme al teorema.

3.° La base AC (*fig.* 3) describe la superficie lateral de un cilindro, cuya área es [*Teor.* 196]

$$DE \times 2\pi AD = DE \times 2\pi BG.$$

94. Se llama *zona* esférica la superficie ABD ó $BEFD$ (*figura* 219) engendrada por un arco AB ó BE de una semi-circunferencia ABC que gira al rededor de su diámetro AC.

Las circunferencias BD y EF descritas por los estremos del arco generador se llaman *bases* de la zona.

Altura de una zona es la proyeccion AG ó GH del arco generador sobre el diámetro AC que se toma por eje [42, *pág.* 56].

Si uno de los estremos A del arco generador está en el eje, la zona no tendrá mas que una base BD, que será la circunferencia descrita por el otro estremo.

TEOREMA 198 (*fig.* 220).

El área Z de una zona es igual á su altura multiplicada por la circunferencia del círculo máximo.

Consideremos en primer lugar la zona de una base engendrada por el arco AE de la semi-circunferencia AEL que gira alrededor del diámetro AL.

Dividamos el arco AE en un número cualquiera de partes iguales, y tiremos las cuerdas de los arcos parciales: las áreas de las superficies engendradas por estas cuerdas serán, llamando a á la distancia del centro á las mismas cuerdas, $AF\times 2\pi a$, $FG\times 2\pi a$, $GH\times 2\pi a$, $HI\times 2\pi a$; y por consiguiente, si llamamos X á la área de la superficie engendrada por la línea quebrada $ABCDE$, será

$$X=(AF+FG+GH+HI)\times 2\pi a=AI\times 2\pi a.$$

Ahora bien, el arco ABE es el límite de la línea quebrada $ABCDE$ [*Teor.* 88], y por lo tanto el área Z de la zona es el límite de la área X de la superficie engendrada por la línea quebrada: y como el radio r del círculo generador (que es el círculo máximo de la esfera engendrada) es el límite de la distancia a del centro á las cuerdas, tendremos

$$Z=AI.2\pi r.$$

Consideremos ahora la zona de dos bases descrita por el arco BD. Esta zona es la diferencia de las zonas de una base descritas por los arcos AD y AB. Las áreas de estas son, segun acabamos de demostrar, $AH\times 2\pi r$ y $AF\times 2\pi r$; luego la área de la zona descrita por el arco BD será

$$AH\times 2\pi r-AF\times 2\pi r=(AH-AF).2\pi r=FH.2\pi r,$$

conforme al teorema.

TEOREMA 199 (*fig.* 220).

El área de la superficie de una esfera es igual al producto de su diámetro por la circunferencia de su círculo máximo.

En efecto, la superficie de la esfera se compone de las dos zonas engendradas por los dos arcos AE y EL, las cuales tienen por áreas $2\pi r.AI$ y $2\pi r.LI$; luego la área de la esfera es

$$2\pi r.AI+2\pi r.LI=2\pi r.(AI+LI)=2\pi r.AL;$$

y asi queda demostrado el teorema.

NOTA. Si llamamos A al área de la esfera, será $A=2r\times 2\pi r$, ó $A=4\pi r^2$, relacion por medio de la cual se hallará A conociendo r, y al contrario.

Corolarios. 1.° *La área de la esfera es cuádrupla de la de su círculo máximo;* pues la área del círculo máximo es πr^2.

2.° *El área de la esfera es igual á la lateral del cilindro cir-*

cunscripto, y es los $\frac{3}{2}$ de la total de dicho cilindro; pues el área lateral del cilindro circunscripto es [*Teor.* 196] $2r \times 2\pi r = 4\pi r^2$, y la total será $4\pi r^2 + \pi r^2 + \pi r^2 = 6\pi r^2$; y es claro que el área $4\pi r^2$ de la esfera es $\frac{2}{3}$ de $6\pi r^2$.

95. Se llama *huso esférico* la parte *ABCDA* (*fig.* 200, *sin las tangentes* AS *y* AT) de la superficie de la esfera comprendida entre dos semi-circunferencias máximas *ABC* y *ADC*.

TEOREMA 200 (*fig.* 200, *sin las tangentes* AS *y* AT).

El área de un huso esférico ABCDA *es al área* E *de la esfera, como el ángulo esférico* BAD *del huso es á 4 rectos.*

Para demostrar este teorema, antepondremos el lema siguiente: *dos husos de una misma esfera son iguales, cuando sus ángulos esféricos son iguales.*

Pues si hacemos coincidir los dos ángulos esféricos iguales, las dos semi-circunferencias máximas de un huso coincidirán con las dos del otro, y por consiguiente los dos husos coincidirán.

Pasemos ahora á la demostracion del teorema.

Pueden suceder dos casos: 1.° que el ángulo esférico *BAD* del huso sea conmensurable con su adyacente el ángulo esférico *DAE*; 2.° que dicho ángulo esférico *BAD* sea inconmensurable con el ángulo esférico *DAE*.

1.*er caso.* Supongamos que la medida comun de los ángulos esféricos *BAD* y *DAE* esté contenida 7 veces en aquel y 19 veces en este; la razon de los dos ángulos esféricos *BAD* y *DAE* será $\frac{7}{19}$. El huso *ABCDA* contiene 7 husos parciales, y al huso *ADCEA* contiene 19 husos parciales: todos estos husos parciales son iguales, segun el lema; luego cualquiera de ellos es la medida comun de los dos husos propuestos, y por tanto la razon de estos dos husos es $\frac{7}{19}$, la misma que la de los ángulos esféricos correspondientes. Tenemos pues

$$ABCDA : ADCEA :: BAD : DAE.$$

De esta proporcion resulta esta otra,

$$ABCDA : ABCDA + ADCEA :: BAD : BAD + DAE,$$

ó
$$ABCDA : \frac{E}{2} :: BAD : 2R,$$

ó en fin
$$ABCDA : E :: BAD : 4R,$$

conforme al enunciado del teorema.

2.° *caso.* Si el ángulo esférico *BAD* es inconmensurable con el ángulo esférico *DAE*, se demostrará el teorema del mismo modo que el 2.° caso del teorema 49.

Nota. De esta proporcion podremos deducir el área de un huso, conociendo su ángulo esférico y el radio de la esfera.

Ejemplo. Hallar el área de un huso de una esfera de 10 varas de radio, y cuyo ángulo esférico correspondiente es de 33°.

Sea H el área del huso: tendremos $\frac{H}{4\pi.10^2}=\frac{33}{360}=\frac{11}{120}$, ó $\frac{H}{31,4159}=\frac{11}{3}$, de donde $H=\frac{31,4159\times 11}{3}=115,1916$ varas cuadradas.

* TEOREMA 201 (*fig.* 221).

Las áreas de dos triángulos esféricos simétricos ABC *y* DEF *son iguales.*

Sea P el polo del círculo de la esfera circunscripto al triángulo esférico ABC: tiro los arcos de círculo máximo PA, PB y PC, que serán iguales, y por uno de los vértices D del triángulo esférico DEF el arco de círculo máximo DQ que forme con el lado DE, hácia la izquierda de este lado, el ángulo QDE igual al PAB; tomo sobre dicho arco una parte DQ igual al arco PA, y junto el punto Q con los E y F por medio de los arcos de círculo máximo QE y QF. Los triángulos PAB y QDE tienen iguales los lados AB y DE por suposicion, iguales los lados PA y QD, y tambien los ángulos PAB y QDE por construccion, es decir que tienen dos lados respectivamente iguales é igual el ángulo comprendido, y como la disposicion de estas partes iguales es contraria, dichos triángulos son simétricos; mas el PAB es isósceles; luego [*Teor.* 182, *Nota*] dichos triángulos son iguales. Por consiguiente los lados PB y QE son iguales. Por ser iguales los ángulos PAB y QDE, como tambien los BAC y EDF, las diferencias PAC y QDF serán iguales; luego los triángulos PAC y QDF tienen dos lados respectivamente iguales é igual el ángulo comprendido: la disposicion de estas partes iguales es contraria; luego estos triángulos son simétricos; y como el triángulo PAC es isósceles, dichos triángulos son iguales. Por consiguiente los lados PC y QF son iguales. Luego los triángulos PBC y QEF (cuyos tres lados son respectivamente iguales y estos lados iguales tienen disposicion contraria) son simétricos; pero como el PBC es isósceles, dichos triángulos son iguales.

Esto supuesto, representando las áreas de estos triángulos por los nombres de los mismos, tendremos

$$PAB+PBC-PAC=QDE+QEF-QDF,$$

ó

$$ABC=DEF.$$

Nota. Hemos supuesto que el polo P estaba fuera del triángulo *ABC*; mas si el polo estuviese dentro de dicho triángulo, los dos triángulos propuestos serian las sumas de tres triángulos, cuya igualdad respectiva se demostraria como en el caso anterior. Si el polo cayese en uno de los lados del triángulo esférico, los dos triángulos propuestos serian las sumas de dos triángulos respectivamente iguales.

* TEOREMA 202 (*fig.* 222).

El área de un triángulo esférico es á la de la esfera, como la suma de los tres ángulos del triángulo disminuida en dos rectos es á 8 *rectos.*

Sea el triángulo esférico *ABC*, á cuyos ángulos esféricos llamaremos A, B, C; sea T su área y E la de la esfera: digo que

$$\frac{T}{E}=\frac{A+B+C-2R}{8R}.$$

Prolongo el lado *AB*, hasta que sea una circunferencia entera *ABED*, y prolongo los otros dos lados *AC* y *BC*, hasta que sus prolongaciones encuentren á esta circunferencia en los puntos *D* y *E*, y se encuentren ellas en el punto *F*; y tiro los diámetros *AE*, *BD* y *CF*. Los dos triángulos esféricos *ABF* y *CDE* correspondientes á los triedros simétricos *OABF* y *OCDE* [*Teor.* 150] son simétricos [90, *pág.* 128], y por tanto equivalentes. El huso, cuyo ángulo esférico es A, se compone del triángulo propuesto y del *BCE*. El huso, cuyo ángulo esférico es B, se compone del triángulo propuesto y del *ACD*. El huso, cuyo ángulo esférico es C, se compone del triángulo propuesto y del *ABF* ó de su equivalente el *DCE*. Ahora bien, tenemos [*Teor.* 200]

$$\frac{T+BCE}{E}=\frac{A}{4R},\quad \frac{T+ACD}{E}=\frac{B}{4R},\quad \frac{T+DCE}{E}=\frac{C}{4R}.$$

Sumando ordenadamente estas igualdades, y observando que los cuatro triángulos *ABC*, *BCE*, *ACD* y *DCE* componen la superficie de media esfera, será

$$\frac{2T+\frac{E}{2}}{E}=\frac{A+B+C}{4R},\ \text{ó}\ \frac{2T}{E}+\tfrac{1}{2}=\frac{A+B+C}{4R},\ \text{ó}\ \frac{2T}{E}=$$

$$\frac{A+B+C}{4R}-\tfrac{1}{2},\ \text{ó}\ \frac{2T}{E}=\frac{A+B+C-2R}{4R};\ \text{y por último}$$

$$\frac{T}{E}=\frac{A+B+C-2R}{8R}.$$

Nota. Si se conocen los tres ángulos del triángulo esférico y además el radio de la esfera, esta proporcion nos dará el área del triángulo esférico.

Ejemplo. Hallar el área del triángulo esférico cuyos tres ángulos son 80°, 100° y 120°, siendo 10 metros el radio de la esfera en que dicho triángulo está situado.

Para que un triángulo esférico sea posible, es menester que la suma de sus tres ángulos sea mayor que 180°, y que la diferencia entre la suma de dos de dichos ángulos y el tercero sea menor que dos ángulos rectos [*Teor.* 176]; condiciones que se verifican en este ejemplo.

Siendo 10 metros el radio de la esfera, el área de esta es $4 \times 3{,}14159 \times 100 = 1256{,}636$ metros cuadrados; luego, llamando T al área del triángulo esférico, tendremos

$$\frac{T}{1256{,}636} = \frac{120}{8 \times 90}, \text{ ó } \frac{T}{1256{,}636} = \frac{1}{6}, \text{ de donde } T = 209{,}439$$

metros cuadrados.

CAPÍTULO III.

Comparacion de las áreas.

TEOREMA 203.

La razon de las áreas de dos poliedros semejantes es la de los cuadrados de sus aristas homólogas, ó el cuadrado de la razon de sus aristas homólogas.

Sean C, C', C'', etc. las caras de un poliedro; c, c', c'', etc. las del otro, respectivamente semejantes á las primeras: A una arista de C, A' una arista de C', A'' una arista de C'', etc.; a una arista de c homóloga de la A, a' una arista de c' homóloga de la A', a'' una arista de c'' homóloga de la A'', etc.: tendremos, siendo q la razon de las aristas homólogas, que la razon de las caras semejantes C y c será q^2, é igualmente la razon de las caras semejantes C' y c', C'' y c'', etc. será q^2. Luego la razon de $C + C' + C'' + \ldots\ldots$ á $c + c' + c'' + \ldots\ldots$ será tambien q^2, conforme al teorema.

97. Se llaman conos *semejantes* los conos cuyos triángulos generadores son semejantes.

TEOREMA 204.

Las áreas laterales de los conos semejantes son proporcionales á los cuadrados de los radios de sus bases, á los cuadrados de sus alturas, ó á los cuadrados de sus lados.

Sean R y r los radios de las bases de los dos conos semejantes, A y a sus alturas, L y l sus lados.

Siendo semejantes los triángulos generadores, será

$$L : l :: R : r,$$

tambien $\pi R : \pi r :: R : r;$

luego $\pi RL : \pi rl :: R^2 : r^2;$

y pues πRL y πrl son las áreas laterales de los dos conos, queda demostrado que estas áreas son proporcionales á los cuadrados de los radios de las bases de los dos conos semejantes. Además, siendo semejantes los triángulos generadores, los radios de las bases de los dos conos son proporcionales á los lados y á las alturas de estos; luego tambien queda demostrado que dichas áreas son proporcionales á los cuadrados de los lados y á los cuadrados de las alturas.

98. Se llaman cilindros *semejantes* los cilindros cuyos rectángulos generadores son semejantes.

TEOREMA 205.

Las áreas laterales de los cilindros semejantes son proporcionales á los cuadrados de los radios de sus bases, y á los cuadrados de sus alturas.

Sean R y r los radios de las dos bases de los dos cilindros, A y a sus alturas.

Por ser semejantes los rectángulos generadores, es

$$A : a :: R : r,$$

tambien $2\pi R : 2\pi r :: R : r;$

luego $2\pi RA : 2\pi ra :: R^2 : r^2;$

y como $2\pi RA$ y $2\pi ra$ son las áreas laterales de los dos cilindros, y por ser los rectángulos generadores semejantes, los radios de las bases son proporcionales á las alturas, resulta que las áreas laterales de los dos cilindros semejantes son proporcionales á los cuadrados de los radios de las bases, y á los cuadrados de las alturas.

TEOREMA 206.

Las áreas de las esferas son proporcionales á los cuadrados de sus radios: pues siendo R y r los radios, $4\pi R^2$ y $4\pi r^2$ son las áreas de las esferas; y es evidente que

$$4\pi R^2 : 4\pi r^2 :: R^2 : r^2.$$

CAPÍTULO IV.

Volúmenes de los poliedros.

99. Se llama *volúmen* de un cuerpo la medida ó valor numérico del espacio que ocupa dicho cuerpo, es decir, el número de veces que este espacio contiene á la unidad, ó mas generalmente la razon del mismo espacio á la unidad.

Para medir el espacio que ocupa un cuerpo, se toma por unidad un cubo.

Dos espacios limitados son *equivalentes*, cuando tienen igual volúmen, y no pueden coincidir; y son *iguales*, cuando pueden coincidir.

TEOREMA 207 (*fig.* 223).

La razon de dos paralelepipedos rectángulos AG *y* ag, *que tienen iguales bases* EFGH *y* efgh, *es la misma que la de sus alturas* AE *y* ae.

1.° Si las alturas *AE* y *ae* son conmensurables, supongamos que la medida comun quepa 7 veces en *AE* y 4 veces en *ae*: la razon de las alturas *AE* y *ae* será $\frac{7}{4}$. Tirando por los puntos de division de las alturas planos paralelos á las bases, el paralelepípedo *AG* quedará dividido en 7 paralelepípedos parciales, y el paralelepípedo *ag* en 4: todos estos paralelepípedos parciales son iguales, pues tienen bases y alturas iguales [*Teor.* 159]; luego cualquiera de ellos es la medida comun de los dos paralelepípedos propuestos: luego la razon de estos dos paralelepípedos es $\frac{7}{4}$, la misma que la de las alturas.

2.° Si las alturas *AE* y *ae* son inconmensurables, se demostrará el teorema como se demostró su análogo el 90.

Nota. Las *dimensiones* de un paralelepípedo rectángulo son las tres aristas de uno de sus ángulos triedros: por consiguiente, cuando dos paralelepípedos rectángulos tienen bases iguales, tienen dos dimensiones del uno iguales respectivamente á dos dimensiones del otro; y por tanto el teorema último puede enunciarse asi: *la razon de dos paralelepipedos rectángulos, que tienen dos dimensiones comunes, es la de sus terceras dimensiones.*

TEOREMA 208.

La razon de dos paralelepipedos rectángulos que tienen una dimension comun, es la de los productos de las otras dos dimensiones.

Sean *P* y *P'* los dos paralelepípedos rectángulos; *a, b* y *c* las dimensiones del primero; a, b' y c' las del segundo: digo que la razon $\frac{P}{P'}$ es igual á la razon $\frac{b \times c}{b' \times c'}$.

Sea P'' un tercer paralelepípedo rectángulo, cuyas dimensiones sean a, b y c'.

La razon de los paralelepípedos P y P'', que tienen dos dimensiones comunes a y b, es la de sus terceras dimensiones c y c', esto es,

$$\frac{P}{P''} = \frac{c}{c'}.$$

La razon de los paralelepípedos P'' y P' que tienen comunes las dos dimensiones a y c', es la de sus terceras dimensiones b y b', esto es,

$$\frac{P''}{P'} = \frac{b}{b'}.$$

Multiplicando ordenadamente estas proporciones, y suprimiendo el factor P'' comun á los dos términos de la primera razon, resulta

$$\frac{P}{P'} = \frac{b \times c}{b' \times c'} \text{ (a)}.$$

TEOREMA 209.

La razon de dos paralelepípedos rectángulos cualesquiera es la de los productos de sus tres dimensiones.

Sean P y P' los dos paralelepípedos, a, b y c, a', b' y c' sus dimensiones: digo que la razon $\frac{P}{P'}$ es igual á la razon $\frac{a \times b \times c}{a' \times b' \times c'}$.

Sea P'' un tercer paralelepípedo que tenga las dimensiones a, b' y c'.

La razon de los paralelepípedos P y P'', que tienen comun la dimension a, es la de los productos de las otras dos dimensiones, esto es,

$$\frac{P}{P''} = \frac{b \times c}{b' \times c'}.$$

La razon de los paralelepípedos P'' y P', que tienen comunes las dos dimensiones b' y c', es la de sus terceras dimensiones a y a', esto es,

$$\frac{P''}{P'} = \frac{a}{a'}.$$

(a) En las proporciones $\frac{P}{P''} = \frac{c}{c'}$, $\frac{P''}{P'} = \frac{b}{b'}$ pueden considerarse P, P' y P'' como paralelepípedos, ó como medidas de estos paralelepípedos; pero cuando se multiplican estas proporciones, se admite implícitamente que P, P', P'' representan sus medidas; pues seria absurdo pretender multiplicar un paralelepípedo por otro.

Multiplicando estas dos proporciones ordenadamente, y suprimiendo el factor P'' comun á los dos términos de la primera razon, resulta

$$\frac{P}{P'}=\frac{a\times b\times c}{a'\times b'\times c'}.$$

Ejemplo. Hallar la razon de dos paralelepípedos rectángulos cuyas dimensiones sean: las del primero 3 pies, 5 pies y 7 pies, y las del segundo 2 varas $1\frac{1}{3}$ varas y 3 varas.

Como los tres teoremas [207, 208 y 209] suponen que la unidad, con que se han de medir las dimensiones de los dos paralelepípedos, ha de ser cualquiera, pero la misma para todas ellas, reduciremos las dimensiones del segundo paralelepípedo á pies, y entonces estas dimensiones serán 6 pies, 4 pies y 9 pies. Llamando, para mayor claridad, P y P' á los dos paralelepípedos, tendremos

$$\frac{P}{P'}=\frac{3.5.7}{6.4.9}=\frac{35}{72};$$

es decir, que la razon del primer paralelepípedo al segundo es $\frac{35}{72}$, ó lo que es igual, el primer paralelepípedo es $\frac{35}{72}$ del segundo.

TEOREMA 210.

El volúmen de un paralelepípedo rectángulo es igual al producto de sus tres dimensiones; si la unidad lineal es el lado del cubo tomado por unidad de espacio.

Sea P el paralelepípedo rectángulo, a, b y c sus tres dimensione, C el cubo que se toma por unidad, y l su lado. Como el cubo es un paralelepípedo rectángulo, cuyas tres dimensiones son iguales, tendremos

$$\frac{P}{C}=\frac{a\times b\times c}{l^3}.$$

El primer miembro es la medida del paralelepípedo P ó su volúmen [99]; luego *el volúmen de un paralelepípedo rectángulo es igual al producto de sus tres dimensiones dividido por la tercera potencia del lado del cubo que se toma por unidad de espacio; siendo medidas las cuatro rectas con la misma unidad arbitraria.*

Si el lado l del cubo C es la unidad lineal, será $l=1$, $l^3=1$, y por consiguiente $\frac{P}{C}=a\times b\times c$, que es el enunciado del teorema.

NOTA. Como $b\times c$ representa la superficie de la base del paralelepípedo, siendo unidad de superficie una cara de la unidad de espacio [*Teor*. 92], se puede enunciar el teorema anterior en estos otros términos: *el volúmen de un paralelepípedo rectángulo es igual al producto de su base por su altura.*

Nota. En todas las reglas de medicion de espacios que siguen, tomaremos por unidad lineal el lado del cubo tomado por unidad de espacio; y asi evitaremos en todas ellas la division del producto de tres rectas por la tercera potencia del lado de dicho cubo.

Corolario. *El volúmen de un cubo es igual á la tercera potencia de su lado*: pues el cubo es un paralelepípedo rectángulo cuyas tres dimensiones son iguales (*a*).

Segun esta regla, un pie cúbico, es decir, un cubo que tiene por arista un pie lineal, tiene $12 \times 12 \times 12 = 1728$ pulgadas cúbicas; una vara cúbica tiene 27 pies cúbicos; etc.

TEOREMA 211 (*fig*. 224).

Todo prisma oblicuo EC *és equivalente á un prisma recto* NL *cuya altura* NI *es igual á la arista lateral* AE *del primero, y cuya base* NOPQ *es la seccion recta de este.*

En efecto, coloquemos el prisma troncado *NOPQEFGH* sobre el prisma troncado *IKLMABCD*, de modo que coincidan las bases iguales *NOPQ, IKLM:* la arista *NE* coincidirá entonces con la arista *IA*, pues las dos son perpendiculares al plano *IKLM* en el punto *I*; y como las dos rectas *NE* é *IA* son iguales, el punto *E* caerá sobre el punto *A*. Del mismo modo se hace ver que los otros vértices *F*, *G*, *H* caerán sobre los *B*, *C*, *D*. Luego los poliedros *NG* é *IC*, cuyos vértices coinciden, son iguales. Restando de ambos poliedros iguales el prisma troncado *IG*, comun á los dos, los restos *NL* y *EC* tendrán el mismo volúmen, ó serán equivalentes.

TEOREMA 212 (*figs*. 225 *y* 227).

El volúmen de un paralelepípedo cualquiera es igual al producto de su base por su altura.

1.° Consideremos en primer lugar el paralelepípedo recto *EC* (*fig*. 225), siendo rectángulos las cuatro caras *ADHE*, *DCGH*, *BCGF* y *ABFE*, y las otras dos *ABCD* y *EFGH* paralelógramos oblicuángulos: digo que su volúmen será el producto de su base por su altura, ya se tome por base el paralelógramo oblicuángulo *EFGH*, en cuyo caso la altura es una de las aristas laterales, ó ya uno cualquiera de los cuatro rectángulos, y en este caso la

(*a*) De aquí viene el nombre de *cubo* que se da tambien á la tercera potencia de un número; pues dicha tercera potencia es el volúmen de un cubo cuyo lado tiene por valor dicho número.

altura no es ninguna de las aristas, sino la distancia de las dos caras que se toman por bases.

Prolongo las cuatro aristas *DC*, *AB*, *EF* y *HG*, paralelas y pertenecientes á los paralelógramos oblicuángulos, tomo en la prolongacion de una de ellas *DC* una parte $QP = DC$, y por los puntos *Q* y *P* tiro dos planos perpendiculares á dichas aristas. Siendo recto el paralelepípedo *EC*, los ángulos diedros *ADCG* ó *MQPT*, *DABE* ó *QMNR*, *AEFG* ó *MRST*, *DHGE* ó *QVTR* son rectos, y por consiguiente los ángulos *M*, *Q*, *V*, *R* correspondientes á ellos son rectos: luego las caras *MQVR* y *NPTS* son rectángulos, y como además las aristas *MN*, *QP*, *RS* y *VT* son, segun la construccion, perpendiculares á estos rectángulos, el paralelepípedo *RP* es rectángulo. Este paralelepípedo rectángulo es [*Teor.* 211] equivalente al propuesto *EC* (que es un prisma oblícuo, si se consideran como sus bases los rectángulos *ADHE* y *BCGF*) y pues el volúmen del *RP* es [*Teor.* 210, *Nota*] $RSTV \times RM$, ó $MNSR \times RV$, tambien el volúmen del *EC* será cualquiera de estos productos. Mas el rectángulo *RSTV* es equivalente al paralelógramo *EFGH*, pòr tener igual base é igual altura, y el rectángulo *MNSR* es igual al rectángulo *ABFE* por la misma razon; luego el volúmen del paralelepípedo *EC* es $EFGH \times EA$, ó $ABFE \times RV$, conforme al teorema.

Prolongando las cuatro aristas *AD*, *BC*, *FG* y *EH*, se demostraria del mismo modo, que el volúmen del paralelepípedo *EC* es el producto de la base *ADHE* por la altura del paralelepípedo, es decir, por la distancia de las dos caras *ADHE* y *BCGF*.

2.° Supongamos ahora que el paralelepípedo *DG* (*fig.* 227 *sin las líneas* CB, FE, MK y QO) sea oblicuángulo, es decir, que sus seis caras sean paralelógramos oblicuángulos: digo que su volúmen será igual al producto de su base por su altura, siendo base cualquiera de las seis caras.

Prolongo cuatro aristas paralelas *AD*, *BE*, *GH* y *CF*, y construyo el paralelepípedo recto *NL* equivalente al propuesto [*Teorema* 211]: el volúmen del *NL* es [1.°] el producto de su base *INOK* por su altura, que es la distancia de los planos *ANOB* y *CQPG*; luego el paralelepípedo propuesto tendrá el mismo volúmen. Mas el rectángulo *INOK* es equivalente al paralelógramo *ABED*; luego el volúmen del paralelepípedo propuesto es el producto de su base *ABED* por su altura. Tambien el volúmen del paralelepípedo *NL* es [1.°] el producto de su base *IMQN* por la distancia de los dos planos *ANQC* y *BOPG*; y como el rectángulo *IMQN* es equivalente al paralelógramo *ACFD*, se infiere que el volúmen del paralelepípedo propuesto es el producto de su base *ACFD* por la altura ó distancia de esta cara á su paralela.

Para demostrar que el volúmen del paralelepípedo propuesto *DG* es el producto de su base *DEHF* por su altura, se prolongarian las cuatro aristas *AB*, *CG*, *FH* y *DE*, y se repetiria la demostracion anterior.

Corolario. *Dos paralelepípedos de bases equivalentes é igual altura son equivalentes.*

TEOREMA 213 (*figs.* 226 *y* 227).

El volúmen de un prisma triangular es igual al producto de su base por su altura.

Para demostrar este teorema, conviene distinguir dos casos: 1.° que el prisma triangular sea recto; 2.° que sea oblícuo.

1.er *caso.* Sea el prisma triangular recto *ABCDEF* (*fig.* 226): digo que su volúmen es $DEF \times DA$.

Construyo el paralelepípedo recto *DG* de doble base é igual altura que el prisma propuesto. Este paralelepípedo se compone de los dos prismas rectos *ABCDEF* y *BCGEFH*, que tienen iguales bases é iguales alturas; luego dichos prismas son iguales [*Teor.* 159]; luego el prisma propuesto *ABCDEF* es la mitad del paralelepípedo *DG*: el volúmen de este paralelepípedo es $DEHF \times DA$; luego el del prisma será $\frac{1}{2}\, DEHF \times DA$, ó $DEF \times DA$.

2.° *caso.* Sea el prisma triangular oblícuo *ABCDEF* (*fig.* 227): construyo el paralelepípedo *DG*. Los dos prismas triangulares *ABCDEF* y *BCGEFH*, de que se compone este paralelepípedo, no pueden coincidir en general; pues dos ángulos triedros opuestos, *D* y *G* por ejemplo, cuyos ángulos planos son respectivamente iguales, son simétricos; como se ve claramente construyendo el triedro simétrico del *G* ó del *D* [70, *y Teor.* 150].

Para demostrar en este caso la equivalencia de los dos prismas triangulares, prolongo las aristas *AD*, *BE*, *CF* y *GH* del paralelepípedo, y construyo el paralelepípedo recto *IP* equivalente al *EC* [*Teor.* 211]; y tiro tambien las diagonales *KM* y *OQ*.

Segun el teorema 211, el prisma recto *NOQIKM* es equivalente al oblícuo *ABCDEF*, y el prisma recto *POQMLK* es equivalente al oblícuo *BCGEFH*: pero, segun el primer caso del teorema actual, los dos prismas rectos *NOQIKM* y *POQMLK* son iguales; luego los oblícuos *ABCDEF* y *BCGEFH*, equivalentes á ellos, serán equivalentes entre sí; luego cada uno de ellos será mitad del paralelepípedo *DG*: y pues el volúmen de este es el producto de su base *DEHF* por su altura, el volúmen del prisma triangular *ABCDEF* será el producto de su base *DEF* por su altura.

Corolarios. 1.° *El volúmen de un prisma cualquiera es igual al producto de su base por su altura.*

En efecto, dividiendo la base en triángulos por medio de diágonales tiradas desde un vértice á los demás, y tirando planos por estas diagonales y por las aristas correspondientes, quedará el prisma descompuesto en prismas triangulares de igual altura. El volúmen de cada prisma triangular es igual al producto de su base por su altura; luego el volúmen del prisma propuesto será igual á la altura, factor comun, multiplicada por la suma de todas las bases de los prismas triangulares, ó por la base del prisma propuesto.

2.° *Dos prismas, que tienen bases equivalentes é igual altura, son equivalentes.*

3.° *Dos prismas de bases equivalentes son proporcionales á sus alturas; y si tienen alturas iguales, son entre sí como sus bases.*

TEOREMA 214 (*fig.* 228).

Dos tetraedros que tienen iguales alturas y bases equivalentes, son equivalentes.

Sean los dos tetraedros *ABCD* y *EFGH*, cuyas alturas son iguales, y cuyas bases son equivalentes: digo que estos tetraedros son equivalentes.

Coloquemos dichos tetraedros de manera que sus bases estén sobre un mismo plano. Dividamos la altura comun *MN* en cualquier número de partes iguales, y por los puntos de division tiremos planos paralelos á las bases: las secciones correspondientes de cada uno de estos planos con los tetraedros serán equivalentes [*Teor.* 186, *Corol.*]. Considerando á estas secciones como bases, construyamos prismas internos, los cuales serán respectivamente equivalentes, por tener bases equivalentes é igual altura, y por consiguiente las dos sumas de prismas internas serán tambien equivalentes. Ahora bien, dividiendo en partes iguales, cada vez mas pequeñas, las alturas, las dos sumas de prismas se irán aproximando indefinidamente á los tetraedros, que serán sus límites; y pues dichas sumas variables son constantemente iguales en volúmen, los tetraedros lo son tambien.

TEOREMA 215 (*fig.* 229).

El volúmen de un tetraedro es igual al tercio del producto de su base por su altura.

Sea el tetraedro *VABC:* por los puntos *A* y *C* de su base tiro dos rectas *AD* y *CE* paralelas á la *BV*, y por el punto *V* un plano *VDE* paralelo á la base *ABC*: tendremos un prisma *AE* que tiene la misma base y altura que el tetraedro. Este prisma se compone del tetraedro propuesto *VABC* y de la pirámide cuadrangular *VACED*.

Por los puntos *D*, *V* y *C* hago pasar un plano, que dividirá á esta pirámide en los tetraedros *VDEC* y *VDAC*, los cuales son equivalentes, porque sus bases *DEC* y *ADC* son iguales, y su altura, que es la perpendicular bajada desde el punto *V* al plano *ADEC*, es la misma. Considerando ahora que el tetraedro *VDEC* tenga su vértice en *C*, su base será el triángulo *DVE*; y por consiguiente este tetraedro es equivalente al tetraedro propuesto, pues ambos tienen bases iguales, y la misma altura, que es la del prisma *AE*; luego los tres tetraedros, de que se compone este prisma, son equivalentes; y por tanto el tetraedro propuesto es el tercio del prisma. Ahora bien, el volúmen del prisma es el producto de su base por su altura; luego el volúmen del tetraedro es el tercio del producto de su base por su altura.

Corolario. *El volúmen de una pirámide cualquiera es igual al tercio del producto de su base por su altura.*

En efecto, dividiendo la base en triángulos por medio de diagonales tiradas desde un vértice á los demás, y tirando planos por estas diagonales y por las aristas correspondientes, quedará la pirámide descompuesta en tetraedros, cuya altura comun será la de la pirámide: el volúmen de cada tetraedro es igual al tercio del producto de su base por su altura; luego el volúmen de la pirámide será igual al tercio de la altura, factor comun, multiplicada por la suma de todas las bases de los tetraedros, que es la base de la pirámide.

TEOREMA 216 (*figs.* 230 *y* 231).

El volúmen de una pirámide troncada de bases paralelas es igual al tercio de su altura multiplicada por la suma de sus bases y de una media proporcional entre ellas: es decir, que si *B* es la base mayor, *b* la menor, *a* la altura del tronco y *V* su volúmen, será

$$V = \tfrac{1}{3}a\left(B + b + \sqrt{Bb}\right).$$

Consideremos en primer lugar un tetraedro troncado *ABCDEF* (*fig.* 230): tirando desde el vértice *C* las rectas *CD* y *CE*, se ve que la pirámide troncada se compone del tetraedro *CDEF* y de la pirámide cuadrangular *CABED*: el volúmen del tetraedro *CDEF* es evidentemente $\frac{1}{3}aB$. Tiro ahora la recta *BD*: la pirámide cuadrangular se compone de los tetraedros *CABD* y *CBED*: el volúmen del *CABD* es $\frac{1}{3}ab$. Para hallar el volúmen del *CBED*, tiro la recta *CG* paralela á la *BE*, la *GH* paralela á la *DF*, y además las *GB* y *GD*: el tetraedro *CBED* es equivalente al *GBED* ó *BDGE*, por tener la misma base *DBE* é igual altura, puesto que sus vértices *C* y *G* están en una recta parelela á la *BE*, y por tanto al plano *DBE* [*Teors.* 124 *y* 129, *Nota*]. Ahora, siendo el triángulo *EHG* igual al *ABC*, y teniendo los triángulos *GHE* y *GDE* las bases EH y ED en línea recta, su vértice G comun, y por consiguiente la misma altura, será

$$b : EDG :: EH : ED.$$

Los triángulos EDG y EDF tienen las bases EG y EF en línea recta, y un mismo vértice D; luego

$$EDG : B :: EG : FE.$$

Mas, siendo semejantes los triángulos EHG y EDF, es

$$EH : ED :: EG : EF;$$

luego $$b : EDG :: EDG : B,$$

de donde $EDG = \sqrt{Bb}$. Luego el volúmen del tetraedro $DBGE$ es $\frac{1}{3}a\sqrt{Bb}$.

Luego el volúmen de la pirámide triangular troncada, que se compone de los tres tetraedros $CDEF$, $DABC$ y $CDEB$ ó su equivalente $BDGE$, es

$$V = \tfrac{1}{3}aB + \tfrac{1}{3}ab + \tfrac{1}{3}a\sqrt{Bb},$$

ó bien $$V = \tfrac{1}{3}a(B + b + \sqrt{Bb}).$$

Sea ahora AG (*fig.* 231) una pirámide toncada cualquiera de bases paralelas, y $VABCD$ la pirámide deficiente: construyo un tetraedro $V'MNO$, cuya base MNO sea equivalente á la base mayor B de la pirámide troncada, y cuya altura $V'R$ sea igual á la altura VP de la pirámide $VEFGH$. Tomo $V'S = VQ$, y tiro por el punto S un plano paralelo á la base MNO: la seccion IKL será equivalente á la base $ABCD$ [*Teor.* 186, *Corol.*], y por consiguiente $IKL = b$; además la altura SR del tetraedro troncado IO es igual á la $QP = a$. Siendo equivalentes las dos pirámides $VEFGH$ y $V'MNO$, como tambien las dos $VABCD$ y $V'IKL$ [*Teorema* 215, *Corol.*], los troncos AG é $IKLMNO$ serán equivalentes: el volúmen de este tronco es, segun acabamos de hallar, $\frac{1}{3}a(B + b + \sqrt{Bb})$; luego el volúmen del AG es tambien $\frac{1}{3}a(B + b + \sqrt{Bb})$.

Nota. La relacion $V = \frac{1}{3}a(B + b + \sqrt{Bb})$ sirve para hallar cualquiera de las cuatro cantidades V, a, B y b, dadas las otras tres.

TEOREMA 217 (*fig.* 232).

Todo prisma triangular troncado es equivalente á la suma de tres tetraedros, que tienen por base comun la del prisma, y cuyos vértices son los de la otra base del prisma.

Sea el prisma triangular troncado $ABCDEF$: construyo los tres tetraedros $BDEF$, $ADEF$ y $CDEF$, cuya base es la del prisma, y cuyos vértices son los de la otra base del prisma: digo que el prisma es equivalente á la suma de estos tres tetraedros.

Desde luego el prisma se compone de los tetraedros *BDEF*, *BADF* y *BACF*. El tetraedro *BADF* es equivalente al tetraedro *EADF* ó *ADEF*, por tener la misma base *ADF* é igual altura, pues sus vértices están en la recta *BE* paralela á la base. El tetraedro *BACF* es equivalente al tetraedro *EDCF* ó *CDEF*, por tener bases equivalentes *CAF* y *CDF*, é igual altura. Queda pues demostrado que el prisma troncado *ABCDEF* es equivalente á la suma de los tres tetraedros *BDEF*, *ADEF* y *CDEF*.

Corolario 1.° *El volúmen de un prisma triangular troncado es igual al tercio del producto de su base por la suma de las tres perpendiculares bajadas á esta base desde los tres vértices de la otra.*

Corolario 2.° *El volúmen de un prisma troncado cualquiera se hallará descomponiéndole en prismas triangulares troncados, hallando el volúmen de cada uno, y sumando dichos volúmenes.*

NOTA. El volúmen de un poliedro cualquiera se halla descomponiéndole en pirámides, hallando el volúmen de cada una, y sumando estos volúmenes.

CAPÍTULO V.

Volúmenes de los cuerpos redondos.

TEOREMA 218.

El volúmen V *de un cono es igual al tercio del producto de su base* B *por su altura* a.

Inscribo en el cono una pirámide regular. Sea p el área de la base de la pirámide inscripta, a la altura comun del cono y de la pirámide, X el volúmen de dicha pirámide: será $X = \frac{1}{3}ap$. Multiplicando suficientemente el número de lados de la base de la pirámide inscripta, y por consiguiente el número de sus caras, será B el límite de p, y por tanto V el límite de X; luego $V = \frac{1}{3}aB$.

NOTA. Siendo $V = \frac{1}{3}aB$, y $B = \pi r^2$, será $V = \frac{1}{3}\pi ar^2$, ecuacion que sirve para hallar cualquiera de la tres cantidades V, a y r, dadas las otras dos.

TEOREMA 219 (*fig.* 233).

El volúmen de un cono troncado de bases paralelas es igual al tercio de su altura multiplicada por la suma de sus bases y de una media proporcional entre ellas.

Sea *ABCD* el cono troncado de bases paralélas, *VAB* el cono deficiente, *V* el volúmen del cono troncado, a su altura *PO*, B y b sus bases *CD* y *AB*; $\sqrt{Bb}$ será la media proporcional entre dichas bases: digo que

$$V = \tfrac{1}{3}a(B + b + \sqrt{Bb}).$$

Sea $V'MNQ$ un tetraedro de base equivalente é igual altura que el cono; tomo $V'K = VP$, y por el punto K tiro un plano paralelo á la base MNQ: la seccion RST que resulta, será equivalente á la base AB del cono (se demuestra del mismo modo que el *Corolario del Teor.* 186), y la altura $KH = PO = a$. El tetraedro $V'MNQ$ y el cono VCD son equivalentes, como tambien el tetraedro $V'RST$ y el cono VAB; luego la pirámide troncada $RSTMNQ$ y el cono troncado $ABCD$ serán equivalentes. El volúmen de la pirámide troncada es

$$V = \tfrac{1}{3}KH(RST + MNQ + \sqrt{RST \times MNQ});$$

luego el volúmen del cono troncado será esta misma cantidad: y reemplazando la altura y las bases por sus valores a, B y b, resulta

$$V = \tfrac{1}{3}a(B + b + \sqrt{Bb}).$$

Nota. Si R y r son los radios de las dos bases, será $B = \pi R^2$, $b = \pi r^2$, y por consiguiente $\sqrt{Bb} = \pi Rr$; luego

$$V = \tfrac{1}{3}\pi a(R^2 + r^2 + Rr),$$

relacion por medio de la cual se puede hallar cualquiera de las cuatro cantidades V, a, R y r, dadas las otras tres.

TEOREMA 220.

El volúmen V *de un cilindro es igual al producto de su base* B *por su altura* a.

Inscribo en el cilindro un prisma regular: sea p el área de la base de este prisma, a la altura comun al cilindro y al prisma, y X el volúmen del prisma: tendremos $X = pa$; luego pasando á los límites, $V = Ba$.

Nota. Si r es el radio de la base del cilindro, será $B = \pi r^2$; luego $V = \pi r^2 a$, relacion que sirve para hallar cualquiera de las tres cantidades V, r y a, dadas las otras dos.

TEOREMA 221 (*figs.* 234, 235 *y* 236) (*a*).

Si un triángulo ABC *gira al rededor de una recta* MN *esterior á él, y que pasa por su vértice* A *en su plano, el volúmen del espacio, que engendra dicho triángulo, es igual á la área de la superficie descrita por la base* BC *multiplicada por el tercio de su altura* AD.

Pueden suceder tres casos: 1.° que uno de los lados del triángulo coincida con el eje, 2.° que la base prolongada encuentre al eje, 3.° que la base sea paralela al eje.

(*a*) Preparatorio para llegar al volúmen del sector esférico.

Primer caso (*fig.* 234). Consideremos en primer lugar el triángulo ABC (*fig.* 1), en que los ángulos A y C, adyacentes al lado que coincide con el eje, sean agudos: bajo desde el vértice B una perpendicular BE al eje MN; esta perpendicular caerá dentro del triángulo ABC. El cuerpo engendrado por el triángulo ABC, en su movimiento, se compone de los dos conos engendrados por los dos triángulos ABE y CBE, cuyos volúmenes son $\frac{1}{3}AE \times \pi BE^2$ y $\frac{1}{3}CE \times \pi BE^2$; luego el volúmen del espacio engendrado por el triángulo ABC será

$$\tfrac{1}{3}AE \times \pi BE^2 + \tfrac{1}{3}CE \times \pi BE^2 = \tfrac{1}{3}(AE + CE)\pi BE^2 = \tfrac{1}{3}AC \times \pi BE^2 \ldots \; [1].$$

Ahora, los productos $AC \times BE$ y $BC \times AD$ son iguales, porque cada uno es doble del área del triángulo ABC; luego, sustituyendo en la espresion [1] en vez de $AC \times BE$ su igual $BC \times AD$, el volúmen en cuestion será

$$\tfrac{1}{3}AD \times \pi BE.BC;$$

y pues $\pi BE.BC$ es [*Teor.* 194] el área de la superficie cónica descrita por la base BC, queda demostrado el teorema.

Supongamos ahora que uno de los ángulos A adyacente al lado AC sea recto (*fig.* 2): el triángulo ABC engendrará un cono, cuyo volúmen es $\frac{1}{3}AC \times \pi AB^2$; y como $AC \times AB = BC \times AD$, el volúmen de dicho cono será $\frac{1}{3}AD \times BC.\pi AB$, conforme al enunciado del teorema.

Segundo caso. Si la base BC (*fig.* 235) prolongada encuentra al eje en E, el cuerpo engendrado por el triángulo ABC es la diferencia de los cuerpos engendrados por los dos triángulos ABE y ACE, que se hallan en el primer caso: los volúmenes de estos cuerpos (llamando A y A' á las áreas de las superficies descritas por los lados BE y CE) son $\frac{1}{3}AD \times A$ y $\frac{1}{3}AD \times A'$; luego el volúmen pedido será

$$\tfrac{1}{3}AD \times A - \tfrac{1}{3}AD \times A' = \tfrac{1}{3}AD(A - A');$$

y como $A - A'$ es el área de la superficie descrita por el lado BC, queda demostrado el teorema.

Tercer caso. Sea la base BC (*fig.* 236) paralela al eje MN; y consideremos el caso en que la altura AD caiga dentro del triángulo ABC. El cuerpo engendrado por este triángulo es la diferencia entre el cilindro producido por el rectángulo $EBCF$, y la suma de los dos conos producidos por los dos triángulos rectángulos ABE y ACF; luego el volúmen de dicho cuerpo será

$$BC.\pi BE^2 - (\tfrac{1}{3}AE.\pi BE^2 + \tfrac{1}{3}AF.\pi BE^2) = BC.\pi BE^2 - \tfrac{1}{3}EF.\pi BE^2 =$$
$$\tfrac{2}{3}BC.\pi BE^2 = \tfrac{1}{3}AD \times BC.2\pi BE;$$

y pues $BC.2\pi BE$ es el área de la superficie cilíndrica descrita por la base BC del triángulo ABC, queda demostrado el teorema.

Nota. Aunque para la demostracion general de este lema habria que considerar mayor número de casos, los que hemos considerado son suficientes para llegar al volúmen de un sector esférico.

100. Se llama *sector esférico* el cuerpo $OABD$ (*fig.* 219) engendrado por un sector circular OAB, que gira al rededor de uno de sus radios OA.

TEOREMA 222 (*fig.* 220).

El volúmen V *de un sector esférico es igual al producto de la área* Z *de la zona correspondiente por el tercio del radio.*

Dividamos el arco AE en un número cualquiera de partes iguales, y tiremos las cuerdas de estos arcos: sean S, S', S''... las áreas de las superficies engendradas por estas cuerdas, a la distancia del centro á las mismas cuerdas, y X el volúmen del espacio engendrado por el polígono $OABCDE$. Tiremos los radios OB, OC... Segun el teorema preparàtorio precedente, los volúmenes de los espacios engendrados por los triángulos OAB, OBC, OCD... serán respectivamente $\frac{1}{3}aS$, $\frac{1}{3}aS'$, $\frac{1}{3}aS''$...; luego el volúmen del espacio engendrado por el polígono $OABCDE$ será

$$X = \tfrac{1}{3}a(S + S' + S'' + \ldots).$$

Ahora, r es el límite de a, y siendo el límite de la línea quebrada $ABCDE$ el arco ACE, será la zona Z, producida por este arco, el límite de la superficie $S + S' + S'' + \ldots$ producida por dicha línea quebrada; y por consiguiente el volúmen V del sector esférico engendrado por el sector circular $OACE$ es el límite del volúmen X del espacio engendrado por el polígono $OABCDE$: luego, segun el teorema de los límites,

$$V = \tfrac{1}{3}rZ.$$

TEOREMA 223 (*fig.* 219 *sin el circulo* EF).

El volúmen de una esfera es igual al producto de su área por el tercio del radio.

En efecto, la esfera se compone de dos sectores esféricos $OABD$, $OBCD$, cuyas zonas correspondientes componen la superficie de la esfera; luego, si Z y Z' son las áreas de dichas zonas, los volúmenes de los sectores esféricos serán $\frac{1}{3}rZ$ y $\frac{1}{3}rZ'$, y por consiguiente el volúmen de la esfera será $\frac{1}{3}r(Z + Z')$; luego etc.

Nota. Sea el V volúmen de la esfera, será $V = \frac{1}{3}r \times 4\pi r^2$, ó $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, relacion que puede servir para hallar V conociendo r, y al contrario.

La espresion que acabamos de hallar para el volúmen de la esfera, puede escribirse asi: $V = 2r \times \frac{2}{3}\pi r^2$; es decir, *el volúmen de una esfera es igual á su diámetro multiplicado por los $\frac{2}{3}$ del círculo máximo;* enunciado análogo al del área de la esfera.

Corolario. *El volúmen de la esfera es $\frac{2}{3}$ del volúmen del cilindro circunscripto*: pues el volúmen de este cilindro es $2r \times \pi r^2 = 2\pi r^3$; y es evidente que el volúmen $\frac{4}{3}\pi r^3$ de la esfera es $\frac{2}{3}$ de $2\pi r^3$.

101. Se llama *segmento esférico* el espacio comprendido dentro de una zona y del plano ó de los planos que la terminan. El segmento tendrá una ó dos bases, si la zona correspondiente tiene una ó dos bases.

Para hallar el volúmen de un segmento esférico ABD (*figura* 219) de una base, menor que un hemisferio, se hallarán los volúmenes del sector $OABD$ y cono OBD correspondientes, y se restarán. Si el segmento esférico CBD es mayor que un hemisferio, se sumarán los volúmenes del sector $OBCD$ y cono OBD correspondientes.

El volúmen de un segmento esférico $BDEF$ de dos bases es la diferencia de los volúmenes de los dos segmentos esféricos correspondientes de una base AEF y ABD.

CAPÍTULO VI.

Comparacion de los volúmenes.

TEOREMA 224.

La razon de los volúmenes de dos poliedros semejantes es la de los cubos de sus aristas homólogas, ó el cubo de la razon de sus aristas homólogas.

Consideremos en primer lugar dos pirámides semejantes. Sea B y b sus bases, A y a sus alturas: tendremos [*Teor.* 186]

$$B : b :: A^2 : a^2;$$

y evidentemente $\qquad \frac{1}{3}A : \frac{1}{3}a :: A : a;$

luego $\qquad \frac{1}{3}AB : \frac{1}{3}ab :: A^3 : a^3;$

es decir, la razon de los volúmenes de las pirámides semejantes es la de los cubos de sus alturas: y pues las alturas son proporcionales á dos aristas homólogas cualesquiera [*Teor.* 186, *Nota*], se infiere que la razon de los volúmenes de dichas pirámides es la de los cubos de sus aristas homólogas.

Consideremos ahora dos poliedros semejantes cualesquiera: sabemos [*Teor.* 187, *Recip.*] que dichos poliedros se componen de tetraedros dispuestos del mismo modo, y respectivamente semejantes. Sean T, T', T'', etc. los tetraedros que componen el primer poliedro, t, t', t'', etc. los que componen el segundo, respectivamente semejantes á los del primero; sean A y a dos aristas homólogas de los tetraedros T y t, A' y a' dos aristas homólogas de los tetraedros T' y t', A'' y a'' dos aristas homólogas de los tetraedros T'' y t'', etc.: tendremos, segun se acaba de demostrar, siendo q la razon de los aristas homólogas,

$$\frac{T}{t} = q^3,\ \frac{T'}{t'} = q^3,\ \frac{T''}{t''} = q^3, \text{ etc.};$$

luego
$$\frac{T + T' + T'' + \ldots}{t + t' + t'' + \ldots} = \frac{T}{t} = q^3.$$

Asi, si las aristas de un poliedro son dobles de las de otro poliedro semejante, la razon del volúmen del primer poliedro al del segundo será 8, es decir que el volúmen del primer poliedro será 8 veces mayor que el del segundo. Si la razon de las aristas homólogas de ambos poliedros es 3, el volúmen del poliedro mayor contendrá 27 veces al del menor; y si la razon de las aristas homólogas fuere $\frac{5}{7}$, la razon de los volúmenes de los dos poliedros semejantes será $\left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{125}{343}$, es decir que el volúmen del primer poliedro es $\frac{125}{343}$ del volúmen del segundo.

TEOREMA 225.

La razon de los volúmenes de dos conos semejantes es la de los cubos de los radios de sus bases, ó la de los cubos de sus alturas, ó la de los cubos de sus lados.

Sean R y r los radios de las bases de los dos conos semejantes, L y l sus lados, A y a sus alturas. Siendo semejantes los triángulos generadores de los dos conos, es

$$A : a :: R : r;$$

y evidentemente
$$\tfrac{1}{3}\pi R^2 : \tfrac{1}{3}\pi r^2 :: R^2 : r^2;$$

luego
$$\tfrac{1}{3}\pi R^2 A : \tfrac{1}{3}\pi r^2 a :: R^3 : r^3 :: A^3 : a^3 :: L^3 : l^3;$$

y pues $\frac{1}{3}\pi R^2 A$ y $\frac{1}{3}\pi r^2 a$ son los volúmenes de los dos conos, queda demostrado el teorema.

TEOREMA 226.

La razon de los volúmenes de los cilindros semejantes es la de los cubos de los radios de sus bases, ó la de los cubos de sus alturas.

Sean R y r los radios de las bases de los cilindros, A y a sus alturas. Por ser semejantes los rectángulos generadores de los cilindros [98], es

$$A : a :: R : r;$$

y evidentemente $\pi R^2 : \pi r^2 :: R^2 : r^2;$

luego $\pi R^2 A : \pi r^2 a :: R^3 : r^3 :: A^3 : a^3;$

y pues $\pi R^2 A$ y $\pi r^2 a$ son los volúmenes de los dos cilindros, queda demostrado el teorema.

TEOREMA 227.

La razon de los volúmenes de las esferas es la de los cubos de sus radios: pues si R y r son los dos radios de las dos esferas, $\frac{4}{3}\pi R^3$ y $\frac{4}{3}\pi r^3$ son sus volúmenes [*Teor.* 223, *Nota*]; y es evidente que la razon de estas cantidades es la misma que la de R^3 á r^3.

PROBLEMA 54 (*fig.* 237).

***Dada la arista* VA = a *de un tetraedro regular* VABC, *hallar su volúmen* V.**

Tomemos por base una cara cualquiera ABC, y bajemos la altura VO del tetraedro regular, la cual caerá en el centro O del triángulo equilátero ABC [74, 2.°]; tendremos [*Teor.* 215] $V = \frac{1}{3}VO \times ABC$. Para hallar la VO, observaremos que esta recta es un cateto del triángulo VAO rectángulo en O; luego, segun el teorema de Pitágoras, tendremos $VO = \sqrt{a^2 - AO^2}$; y como [*Teor.* 83] $\frac{a^2}{AO^2} = 3$, y por consiguiente $AO^2 = \frac{a^2}{3}$, será

$$VO = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Para hallar el área del triángulo ABC, prolongo el radio AO, hasta que encuentre en P al lado BC, al cual es perpendicular [*Teor.* 24], y tendremos $ABC = \frac{a}{2} \times AP$; pero en el triángulo rectángulo ABP es $AP = \sqrt{a^2 - BP^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3};$

luego $ABC = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$. Por consiguiente

$$V = \frac{a}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \times \frac{a^2}{4}\sqrt{3}, \text{ ó } V = \frac{a^3}{12}\sqrt{2},$$

relacion que tambien puede servir para hallar a conociendo V.

ESTUDIO ELEMENTAL

DE LAS CURVAS ELIPSE, PARÁBOLA Y HÉLICE.

CAPÍTULO I.

Nociones preliminares.

102. Se llama curva *plana* la curva cuyos puntos están todos situados en un mismo plano; y curva de *doble curvatura* la curva cuyos puntos no se hallan todos en un mismo plano.

103. Se llama *eje* de una curva plana la recta *AC* (*fig.* 238) que divide á esta curva en dos partes *AB* y *AB'* *simétricas*, es decir, en dos partes que coinciden cuando se dobla el plano por dicha recta *AC*. *Vértice* de una curva es todo punto comun á la curva y á cualquiera de su ejes.

Arco de una curva es una porcion limitada *QAP* de dicha curva. *Cuerda* de una curva es la recta *PQ* que une dos puntos de la curva. *Centro* de una curva es el punto que divide en dos partes iguales á todas las cuerdas que pasan por él.

Se dice que una recta *NQ* *corta* á una curva *BAB'*, ó es *secante* á la misma en un punto *P* ó *Q*, cuando la curva tiene dos arcos *PA* y *PB*, ó *QA* y *QB'*, á uno y otro lado de dicha recta.

104. Se llama curva *convexa* la curva *BAB'* que no puede ser cortada por una recta en mayor número de puntos que dos.

105. La definicion de la tangente al círculo, como recta indefinida que no tiene mas que un punto comun con la circunferencia, no conviene sino á las curvas convexas cerradas: mas adelante veremos que una recta indefinida puede tener un solo punto comun con la curva, y cortar á la curva en dicho punto. Hé aquí la definicion general de la tangente.

Tangente á una curva en uno de sus puntos *M* (*fig.* 239) es la posicion *MT* límite de las posiciones de una secante *MN* que pasa por este punto, y que se mueve al rededor del mismo, de modo que otro punto *N* de interseccion con la curva se vaya acercando indefinidamente al primero.

106. De esta definicion se infiere: 1.° que por un punto M de una curva no pueden pasar dos tangentes á la misma en dicho punto; pues la posicion variable de la secante no puede tener dos posiciones límites diferentes. 2.° que la tangente á una curva convexa tiene un solo punto comun con ella, y todos los demás fuera de la curva; pues la secante á una curva convexa no tiene dentro de la curva mas que la cuerda que une los dos puntos de interseccion; luego reuniéndose en el caso del límite estos dos puntos en uno solo, queda toda la tangente fuera de la curva, escepto el punto de contacto.

Se llama *normal* á una curva la perpendicular á la tangente en el punto de contacto.

CAPÍTULO II.

Elipse.

107. Se llama *elipse* una curva en la que se verifica que la suma de las distancias de cada uno de sus puntos á dos puntos fijos es una cantidad siempre la misma.

Los dos puntos fijos se llaman *focos* de la elipse; y las rectas tiradas desde los focos á los diferentes puntos de la curva se llaman *radios vectores*. Por consiguiente la suma de los radios vectores de un punto cualquiera de la elipse es una cantidad constante.

De la definicion de la elipse resultan las construcciones siguientes de esta curva, cuando se conocen la posicion de los focos y la suma de los radios vectores de cada uno de sus puntos.

Construccion de la elipse por puntos.

Sean F y F' los focos (*fig.* 240), y $2a$ la suma de los radios vectores de cada punto de la elipse. Tomemos sobre la recta FF' prolongada las partes $OA = OC = a$, y los puntos A y C serán dos puntos de la elipse: pues $AF = a - OF$, $AF' = a + OF'$; sumando ordenadamente estas igualdades, y observando que $OF = OF'$, será $AF + AF' = 2a$, es decir, que la suma de los radios vectores del punto A es igual á la cantidad $2a$, y por tanto el punto A es un punto de la elipse pedida. Del mismo modo se demuestra que el punto C es otro punto de esta curva.

Señalemos ahora un punto P sobre la recta limitada FF', y haciendo centro sucesivamente en los dos focos, describamos con el radio AP dos arcos: haciendo centro en seguida en los focos, describamos con el radio CP otros dos arcos, que cortarán á los anteriores en los cuatro puntos M, M', N, N', los cuales corresponderán á la elipse. Tomando otro punto P' entre los focos, y haciendo la misma construccion, tendremos otros cuatro puntos de la curva; y del mismo modo pueden construirse tantos puntos como se quieran. Uniendo estos puntos por medio de una línea contínua, se tendrá la elipse pedida.

Demostremos en primer lugar que las dos circunferencias descritas desde los focos con los radios PA y PC se cortan. La distancia FF' de los centros es menor que la suma $PA + PC = AC$ de los radios. La misma distancia es mayor que la diferencia $PC - PA$ de los radios; pues quitando de minuendo y sustraendo las partes iguales $AF = CF'$, esta diferencia $PC - PA$ es igual á $PF' - PF$, cantidad evidentemente menor que FF'. Por consiguiente estamos seguros de que las circunferencias dichas se cortan en los puntos M y M'. Ahora, siendo $FM = PA$ y $F'M = PC$, es $FM + F'M = PA + PC = 2a$; luego el punto M es un punto de la elipse. Del mismo modo se hace ver que los otros puntos M', N, N'... pertenecen tambien á la elipse que se quiere construir.

Construccion de la elipse por un movimiento contínuo.

Fíjense en los dos focos los estremos de un hilo cuya longitud sea igual á la cantidad $2a$; póngase tirante este hilo por medio de una punta ó estilo, y moviendo esta punta á lo largo del hilo, y permaneciendo este siempre tirante, dicha punta describirá la elipse.

En efecto, en cualquiera de las posiciones de la punta la suma de sus dos distancias á los focos es igual á la longitud del hilo, y por tanto igual á la cantidad dada $2a$; luego todos los puntos trazados por la punta pertenecen á la elipse pedida.

TEOREMA 228 (*fig.* 241).

La recta AC *que pasa por los focos de la elipse, y termina por ambos lados en esta curva, es un eje de la misma; y la recta* BB' *perpendicular á la que une los focos, en su punto medio* O, *y cuyos estremos están en la curva, es otro eje.*

En efecto, desde los focos F y F' describamos con los radios AP y CP dos arcos, que se cortarán en dos puntos M y M' de la elipse: los triángulos $F'MF$ y $F'M'F$ son iguales, porque tienen sus tres lados respectivamente iguales; luego los ángulos MFF' y $M'FF'$ son iguales: luego, si doblamos la elipse por la recta AC, caerá la FM sobre la FM', y por ser iguales estas dos rectas, caerá el punto M sobre el M'. Queda asi demostrado que todo punto del ramo ABC cae, al doblar la figura por la AC, sobre otro punto del ramo CDA, y que por lo tanto el ramo ABC coincide entonces con el CDA; luego estos dos ramos son simétricos, y la recta AC es un eje de la elipse.

Para demostrar ahora que la recta BD es otro eje de la elipse, describamos desde los focos F y F' con los radios respectivos CP y AP otros dos arcos que se cortarán en los puntos N y N' de la elipse, y tiremos las rectas FN y $F'N$: los triángulos FMF' y FNF', que tienen sus tres lados iguales, son iguales; luego los ángulos MFF' y $NF'F$ son iguales: luego doblando la figura por la BD, caerá la OF sobre la OF', y como estas dos rectas son iguales, el punto F caerá sobre el F': por ser iguales los ángulos MFF' y $NF'F$, la recta FM coincidirá con su igual la $F'N$, y por tanto el punto M caerá sobre el N. Vemos, pues, que un punto cualquiera M del ramo BAD cae, despues de doblar la figura por la BD, sobre el ramo BCD; luego entonces estos dos ramos coinciden, y por tanto son simétricos; luego la recta BD es un eje de la curva.

Notas. 1.ª Los cuatro puntos A, B, C y D, en que los dos ejes AC y BD cortan á la elipse, son vértices de esta curva [103].

2.ª *El eje* AC (fig. 242), *que pasa por los focos de la elipse, es mayor que el otro eje* BD: pues tirando las tres rectas BF, BF' y DF, tendremos, segun la definicion de la elipse, $BF + BF' = 2a = AC$; pero evidentemente $BF = BF' = DF$; luego $BF + BF' = BF + DF$, y como $BF + DF > BD$, será $AC > BD$.

El eje que pasa por los dos focos se llama eje *mayor* ó *primero*, y el otro se llama eje *menor* ó *segundo*.

3.ª Siendo $BF = BF'$, y $BF + BF' = 2a$, será $BF = a$: luego, si se dan los dos ejes de la elipse, los dos focos se hallarán describiendo desde un estremo B del eje menor, con un radio igual al semi-eje mayor, un arco que cortará al eje mayor en dos puntos F y F', que son los focos. Por consiguiente la posicion y magnitud de los dos ejes de la elipse determinan esta curva, pues que conociendo los dos ejes y su posicion, es fácil señalar los focos, segun acabamos de ver.

4.ª De la definicion de la elipse y de que el eje mayor AC vale $2a$, *resulta que la suma de los radios vectores de un punto cualquiera de esta curva es igual á su eje mayor.*

TEOREMA 229 (*fig.* 243).

El punto O *de interseccion de los dos ejes de la elipse es el único centro de esta curva.*

Tiremos una cuerda cualquiera EF por el punto O, y doblemos la figura por el eje AC; y supongamos que la recta OE tome entonces la posicion OE': será por consiguiente el ángulo EOA igual al ángulo $E'OA$; luego si doblamos la elipse por el eje BD, caerá la OA sobre la OC, y como el ángulo AOE' es igual al ángulo COF, porque ambos lo son al ángulo EOA, caerá la recta OE' sobre la OF; y como el punto E' tiene que caer tambien sobre la curva, caerá sobre el punto F; luego $OE = OE' = OF$; luego el punto O divide en dos partes iguales á toda cuerda EF que pasa por él, y por tanto dicho punto O es el centro de la elipse.

Para demostrar ahora que otro punto P diferente del O no es centro de la elipse, tiro la cuerda $MPON$, y veo que, por ser el punto O el punto medio de la MN, el punto P no lo es; luego dicho punto P, no divide en dos partes iguales á las cuerdas que pasan por él, y por tanto no es centro de la curva.

108. Se llama *escentricidad* de la elipse la distancia de cualquiera de los focos al centro.

Nota 1.ª Si llamamos c á la escentricidad de una elipse y b al semi-eje segundo, como en el triángulo rectángulo OBF (*figura* 242) es $OF^2 = BF^2 - OB^2$, será $c^2 = a^2 - b^2$. Si permaneciendo a constantemente, b disminuye, c aumentará. Luego si dos elipses tienen un mismo eje primero y diferentes ejes segundos, la escentricidad será mayor en aquella elipse que tenga menor eje segundo. De estas dos elipses la que tiene menor eje segundo, ó mayor escentricidad, se dice que es mas *escéntrica* que la otra.

Nota 2.ª Supongamos que los dos ejes $2a$ y $2b$ sean iguales, y que por consiguiente sea $a = b$; será $c = 0$, es decir que la elipse, cuyos ejes son iguales, tiene los dos focos reunidos en el centro. Es evidente en este caso que los dos radios vectores de cada punto de la elipse son iguales, y como la suma de los dos es $2a$, cada uno valdrá a, y por tanto todos los puntos de la elipse de ejes iguales equidistan del centro; luego esta elipse es un círculo: luego *el círculo es una elipse cuyos ejes son iguales, ó cuyos focos están reunidos en el centro.*

TEOREMA 230 (*fig.* 244).

Si un punto M *está fuera de la elipse, la suma* MF + MF' *de sus dos distancias á los focos es mayor que el eje primero; y si un punto* M' *está dentro de la elipse, la suma* M'F + M'F' *de sus dos distancias á los focos es menor que el eje primero.*

En efecto: 1.° tirando la recta NF, tendremos evidentemente $MF + MF' > NF + NF'$, y como $NF + NF' = 2a$, será $MF + MF' > 2a$.

2.° Tenemos $M'F + M'F' < NF + NF'$, ó bien $M'F + M'F' < 2a$.

Los recíprocos son ciertos [20].

TEOREMA 231 (*fig.* 245).

**La elipse es una curva convexa.*

Sean m y n los dos puntos en que una recta mn corta á la elipse: desde uno de los focos, por ejemplo desde el foco f, bajemos una perpendicular fop á dicha recta, tomemos sobre ella la parte op igual á la of, y tiremos las rectas fm y mp, fn y np, las cuales serán respectivamente iguales, por ser oblícuas que se apartan igualmente de la perpendicular mo. Las dos rectas mp y np no pueden ser á la vez prolongaciones de las $f'm$ y $f'n$, porque entre los dos puntos f' y p no pueden existir dos líneas rectas diferentes. Tampoco una de dichas dos rectas mp ó np puede ser prolongacion de la $f'm$ ó de la $f'n$, pues uno de los dos caminos $f'mp$ ó $f'np$ seria en tal caso menor que el otro, siendo asi que son iguales, porque correspondiendo los puntos m y n á la elipse es $f'm + mf = f'n + nf$, ó $f'm + mp = f'n + np$. Siendo iguales los dos caminos $f'mp$ y $f'np$, la recta $f'p$ cortará á la mn en un punto r intermedio entre los puntos m y n, porque si el punto r estuviese fuera de los puntos m y n, uno de los dos triángulos $f'mp$ y $f'np$ envolveria al otro, y por tanto la suma de los tres lados del envolvente seria mayor que la de los tres lados del envuelto, y quitando de ambas sumas el lado comun $f'p$, seria uno de los caminos $f'mp$ ó $f'np$ mayor que el otro. Segun esto, siendo el lado $f'p$ menor que el camino $f'mp$, como $rp = rf$, será el camino $f'rf < f'mp$, es decir, menor que $2a$, y por tanto el punto r está dentro de la elipse. Si tiramos otra recta $f'q$ á un punto cualquiera q comprendido entre los m y n, y en seguida la $qp = qf$, tendremos que por estar envuelto el triángulo $f'qp$ por el $f'mp$, será $f'q + qp + f'p < f'm + mp + f'p$, y por consiguiente $f'q + qp < f'm + mp$, ó $f'q + fq < 2a$; es decir que el punto q está dentro de la elipse.

Tiremos ahora una recta $f's$ á un punto s de la recta mn, el cual se halle fuera de los dos puntos m y n, y juntemos el punto s con los puntos f y p: tendremos igualmente $f's + sp > f'n + np$ ó $f's + sf > 2a$, es decir que el punto s está fuera de la elipse. Queda pues demostrado que toda secante mn á la elipse no corta á esta curva mas que en dos puntos, y que por tanto la elipse es una curva convexa.

TEOREMA 232 (*fig.* 246).

La tangente MT *á la elipse divide en dos partes iguales al ángulo* FMG *formado por un radio vector* FM *del punto de contacto y por la prolongacion* MG *del otro radio vector del mismo punto.*

Bajemos desde el foco F una perpendicular FOG á la tangente, tomemos sobre esta perpendicular una parte $OG = FO$, y juntemos por una recta los puntos M y G. Siendo tangente á la elipse la recta MT, y siendo la elipse una curva convexa, la tangente MT tendrá fuera de la curva todos sus puntos, escepto el punto de contacto *M* [106, 2.°]; luego, si desde un punto cualquiera *N* de la tangente, que no sea el punto de contacto, tiramos las rectas *NG*, *NF'* y *NF*, tendremos $F'N + NF > F'M + MF$; y como $NF = NG$, $MF = MG$, por ser oblícuas que se apartan igualmente de la perpendicular *MO*, será $F'N + NG > F'M + MG$; es decir que el camino mas corto entre los puntos *F'* y *G* es la línea *F'MG*; luego esta línea es recta, ó lo que es igual, la *MG* es prolongacion de la *F'M*. Por consiguiente, como los ángulos *GMO* y *FMO* son iguales, por la igualdad de los triángulos *OMG* y *OMF*, queda demostrado que la tangente á la elipse etc.

Corolarios. 1.° *La tangente* NT *á la elipse forma ángulos iguales con los radios vectores del punto de contacto;* pues siendo iguales los dos ángulos *GMO* y *FMO*, y siendo el ángulo *GMO* igual al *F'MN*, se infiere que los dos ángulos *FMO* y *F'MN* son iguales.

3.° *La normal* MP *á la elipse forma ángulos iguales con los radios vectores* FM *y* F'M *del punto de contacto:* pues los dos ángulos *FMP* y *F'MP* son complementos de los iguales *FMT* y *F'MN*.

Recíproco. *La bisectriz del ángulo formado por un radio vector y por la prolongacion de su compañero, es tangente á la elipse:* pues siendo la tangente *MT* bisectriz del ángulo *FMG*, y no teniendo un ángulo mas que una bisectriz, es claro que esta coincide con la tangente.

Nota. Si una elipse *AMC* (*fig.* 247 *sin la* MG) gira al rededor de su eje mayor *AC*, engendra una superficie llamada *elipsoide prolongado de revolucion* (*a*). Si la superficie interior de este elipsoide es una superficie reflejante, y se coloca un foco luminoso ó calorífico en uno de sus dos focos, es decir en uno de los focos *F'* de la elipse generatriz, los rayos luminosos ó caloríficos que salgan de este foco, se reflejarán, y volverán á reunirse en el otro foco *F*: pues, al chocar uno de estos rayos con la elipse determinada por el eje mayor y por el mismo rayo, formará, segun su propiedad, el ángulo *FMT* de reflexion igual al ángulo *F'MN* de incidencia; y por tanto el rayo reflejado pasará por el otro foco *F*.

PROBLEMA 55 (*fig.* 247).

Tirar una tangente á la elipse por un punto M *dado en esta curva.*

Tírense los dos radios vectores *FM* y *F'M*, prolónguese uno de ellos, *F'M*, y divídase en dos partes iguales el ángulo *FMG*: la bisectriz *MT* será la tangente.

(*a*) Si la elipse *ABCD* (*fig.* 240) gira al rededor de su eje menor *BD*, la superficie engendrada se llama *elipsoide aplanado de revolucion*.

PROBLEMA 56 (*fig.* 248).

Tirar una tangente á la elipse por un punto I *dado fuera de esta curva.*

Desde el punto I describo una circunferencia con el radio IF, y desde el otro foco F' describo otra circunferencia con un radio igual á $2a$, la cual cortará á la anterior en dos puntos H y K; tiro las rectas $F'H$ y $F'K$, y juntando el punto I con los dos puntos M y N de interseccion de estas rectas con la elipse, las dos rectas IM é IN serán tangentes á la elipse en los puntos M y N.

Demostremos en primer lugar que las dos circunferencias, cuyos centros son los puntos I, F', y cuyos radios respectivos son IF y $2a$, se cortan en dos puntos.

Tiremos la IF', y tendremos desde luego que $IF' < IF + FF'$, y con mayor razon $IF' < IF + 2a$; luego la distancia de los centros es menor que la suma de los radios. Para demostrar ahora que dicha distancia es mayor que la diferencia de los radios, tenemos que considerar tres casos, á saber, que el radio IF sea menor, igual ó mayor que el radio $2a$. Si $IF < 2a$, tenemos $IF' + IF > 2a$; luego $IF' > 2a - IF$. Si el radio $IF = 2a$, es evidente que $IF' > IF - 2a$. Si $IF > 2a$, es $IF' > IF - FF'$; luego con mayor razon $IF' > IF - 2a$. Queda pues demostrado que las dos circunferencias se cortan en dos puntos.

Para demostrar ahora que la IM es tangente á la elipse, tiremos las rectas IH, IF y MF: los dos triángulos IMH y MFI tienen comun el lado IM, el $IH = IF$, tambien $MH = MF$, pues $F'H = 2a$, $F'M + MF = 2a$, y por tanto $F'H = F'M + MF$, y $F'H - F'M = MF$, ó $MH = MF$: luego dichos triángulos son iguales, y por consiguiente los ángulos IMH, IMF son iguales, es decir, que la recta IM es bisectriz del ángulo FMH, y por lo mismo tangente á la elipse en el punto M. Del mismo modo se demuestra que la IN es tambien tangente á la elipse en el punto N.

Apliquemos al círculo, que hemos visto [108, *Nota* 2.ª] es una elipse cuyos focos están reunidos en el centro, este método de tirar tangentes á la elipse por un punto esterior.

Sea la circunferencia O (*fig.* 249) é I el punto dado fuera de ella: desde el punto I describamos con el radio IO una circunferencia, y desde el centro O con un radio igual al diámetro del círculo dado describamos otra circunferencia, que cortará á la anterior en dos puntos H y K; tiremos las dos rectas OH y OK, y en seguida las rectas IM é IN, que serán tangentes á la circunferencia dada.

Se demuestra fácilmente que las dos circunferencias descritas desde los puntos I y O con los radios IO y diámetro del círculo dado se cortan en dos puntos. Esto supuesto, los puntos I, M equidistan de los puntos O, H, y por tanto la IM es perpendicular al radio OM en el punto en que este corta á la circunferencia dada; luego dicha recta IM es tangente á esta circunferencia. Del mismo modo se hace ver que la IN es tambien tangente á la misma circunferencia.

PROBLEMA 57 (*fig.* 250).

Tirar á la elipse una tangente paralela á una recta dada, ó lo que es igual, *una tangente cuya direccion sea dada.*

Sea AMC la elipse y EG la recta dada. Bajemos desde uno de los focos , por ejemplo desde el F, la perpendicular FH á dicha recta EG, y prolonguémosla suficientemente: desde el foco F' describamos con el radio $2a$ un arco que cortará á esta perpendicular en los dos puntos K y L; tiremos las rectas $F'K$ y $F'L$, y por los puntos M y N, en que cortan á la elipse, las MT y NS paralelas á la recta dada EG, y dichas dos paralelas serán las tangentes pedidas.

En efecto, la circunferencia descrita desde el foco F' con el radio $2a$, cortará á la perpendicular FH, porque el radio $2a$ es mayor que $F'F$, y con mayor razon es mayor que la distancia del foco F' á dicha perpendicular FH. Tiremos ahora la recta MF, y tendremos que $F'M + MF = F'K$, y por consiguiente $FM = MK$; luego los dos triángulos rectángulos MKO y FMO son iguales; luego los dos ángulos KMO y FMO son iguales, y por tanto la MT es tangente á la elipse. Del mismo modo se demuestra que la NS es tambien tangente á esta curva.

109. Si llamamos *ordenada* de un punto M (*fig.* 251) de la elipse á la perpendicular MP bajada desde este punto al eje mayor, y *abscisa* á la parte OP del mismo eje comprendida entre el centro y el pie de la ordenada, tendremos el siguiente

TEOREMA 233 (*fig.* 249).

El cuadrado del semi-eje mayor multiplicado por el cuadrado de la ordenada de un punto cualquiera de la elipse, mas el cuadrado del semi-eje menor multiplicado por el cuadrado de la abscisa del mismo punto es igual al producto de cuadrados de los dos semi-ejes.

Sean x á y la abscisa y ordenada de un punto cualquiera M de la elipse, a y b los semi-ejes mayor y menor de esta curva: digo que

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Para demostrar este teorema, los dos triángulos rectángulos $F'MP$ y FMP nos dan, llamando c á la escentricidad,

$$F'M^2 = y^2 + (x+c)^2 = y^2 + x^2 + 2cx + c^2,$$
$$FM^2 = y^2 + (x-c)^2 = y^2 + x^2 - 2cx + c^2;$$

luego $$F'M^2 - FM^2 = 4cx,$$

ó $$(F'M + FM)(F'M - FM) = 4cx;$$

y como $F'M + FM = 2a$, será $F'M - FM = \frac{4cx}{2a} = \frac{2cx}{a}$. Sumando las dos últimas ecuaciones, será $2F'M = 2a + \frac{2cx}{a}$, y por consiguiente $F'M = a + \frac{cx}{a}$. Sustituyendo este valor de $F'M$ en la primera ecuacion, tendremos

$$a^2 + 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2} = y^2 + x^2 + 2cx + c^2,$$

ó $$a^4 + c^2x^2 = a^2y^2 + a^2x^2 + a^2c^2,$$

ó $$a^2y^2 + (a^2 - c^2)x^2 = a^2(a^2 - c^2);$$

y como $a^2 - c^2 = b^2$, será $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, conforme al teorema.

CAPÍTULO III.

Parábola.

110. Se llama *parábola* una curva en la que se verifica que cada uno de sus puntos equidista de un punto fijo y de una recta fija.

El punto fijo se llama *foco* de la parábola, y la recta fija se llama *directriz*: luego todo punto de la parábola equidista del foco y de la directriz. Toda recta tirada desde el foco á un punto de la curva se llama *radio vector*.

De la definicion de la parábola resultan las construcciones siguientes de esta curva, cuando se conocen la posicion del foco y la de la directriz.

Construccion de la parábola por puntos.

Sea DR la directriz (*fig.* 252) y F el foco: bajemos desde este punto una perpendicular DFG á la directriz, y dividiendo la distancia FD en dos partes iguales, el punto medio Θ será un punto de la parábola, porque equidista del foco y de la directriz. Señalemos ahora en la perpendicular DFG á la directriz un punto cualquiera P, y levantemos por dicho punto P una perpendicular á la DG, y desde el foco con el radio DP describamos un arco que cortará á dicha perpendicular en dos puntos M y M', que serán dos puntos de la parábola. Del mismo modo se pueden hallar cuantos puntos se quieran de esta curva. Uniéndolos en seguida por medio de una línea continua, se tendrá la parábola.

Es fácil ver que los puntos construidos de este modo son puntos de la parábola; pues, segun dicha construccion, $FM = DP = MR$, es decir que el punto M equidista del foco y de la directriz.

Construccion de la parábola por un movimiento contínuo.

Para construir la parábola por un movimiento contínuo, se coloca una escuadra en la posicion ADB (*fig.* 253), esto es, de modo que un cateto suyo AD coincida con la directriz, y el otro cateto DB pase por el foco. Se fijan los estremos de un hilo, cuya longitud sea igual al cateto DB de la escuadra, uno en el foco y otro en el estremo móvil B del cateto DB: el hilo quedará flojo entre ambos puntos, pero por medio de una punta ó estilo se le pondrá tirante, y se colocará la punta en O, y este punto O corresponderá á la parábola. Pues siendo la longitud del hilo $DO + OF + FB$, como entre los puntos O y F está en doble, será $DO = OF$, y por tanto el punto O es un punto de la parábola. Muévase ahora la escuadra de modo que el cateto AD coincida constantemente con la directriz, y entonces el cateto DB empujará á la punta, la cual, si se mantiene el hilo tirante, describirá un ramo de la parábola.

En efecto, cuando la escuadra haya llegado á la posicion $A'RB'$, la punta estará en M, y el hilo tendrá la posicion FMB'; mas como la longitud del hilo es igual á la del cateto DB, tendremos $FMB' = RMB'$, y por consiguiente $MF = MR$, es decir que el punto M equidista del foco y de la directriz; luego dicho punto M pertenece á la parábola.

TEOREMA 234 (*fig.* 252).

La perpendicular DFG *bajada á la directriz desde el foco es eje de la parábola.*

En efecto, si doblamos la figura por dicha recta DFG, por ser iguales los triángulos FMP y $FM'P$, y por consiguiente tambien los ángulos MFP y $M'FP$, caerá la MF sobre la FM', y como estas dos rectas son iguales, el punto M caerá sobre el punto M'. Queda pues demostrado que todo punto del ramo OM de la parábola cae, cuando se dobla la figura por la OP, sobre el ramo inferior OM'; luego entonces ambos ramos coinciden; es decir, que dichos dos ramos son simétricos, y por consiguiente la recta DOP es eje de la parábola.

NOTA. El punto O en que el eje OG corta á la parábola es el vértice de esta curva [103].

TEOREMA 235 (*fig.* 254).

Si un punto N *está fuera de la parábola, su distancia al foco es mayor que á la directriz; y si está dentro de la parábola, su distancia al foco es menor que á la directriz.*

En efecto: 1.° prolongando la RN hasta que corte á la parábola en el punto M, y tirando la MF, tendremos $FN+NM>FM$, y puesto que $FM=MR$, será $FN+NM>MR$, y por consiguiente $FN>NR$.

2.° Tirando la MF, será $N'F<N'M+MF$, ó $N'F<N'M+MR$, ó $N'F<N'R$.

Los recíprocos son ciertos [20].

TEOREMA 236 (*fig.* 255).

* *La parábola es una curva convexa.*

Sea f el foco, dr la directriz de una parábola, y pn una recta que corte á esta curva en los dos puntos p y n; digo que un punto cualquiera m de esta recta, que se halle comprendido entre los p y n, está dentro de la curva.

En efecto, tiremos las rectas pf, nf, mf, y las perpendiculares pp', nn', mm' á la directriz: tendremos por suposicion $pf=pp'$, $nf=nn'$. Tiro ahora la recta pn', y veré que los dos triángulos pnf, pnn' tienen comun el lado pn, el lado nf igual al nn', y el lado $pn'>pp'$ ó $pn'>pf$; luego [*Teor. Recip. del* 17] el ángulo pnn' es mayor que el ángulo pnf. Esto supuesto, tiro la recta nf' que forme con la np el ángulo $f'np$ igual al ángulo pnf, tomo sobre ella la parte $nf'=nf$, y tiro la recta $f'm$ que será igual á la fm, por la igualdad de los triángulos $f'nm$ y fnm; tiro tambien la $f'p$ que será igual á la fp, por la igualdad de los triángulos fnp y $f'np$: tiro además la $m'p$ que es mayor que la $pp'=pf$. Tenemos ahora en los dos triángulos $f'om$ y $m'op$, $f'o+om>f'm$, $om'+op>m'p$; luego $f'p+mm'>f'm+m'p$; luego con mayor razon $f'p+mm'>f'm+pp'$; y restando de los dos miembros de esta desigualdad las partes iguales $f'p$ y pp', resulta $mm'>f'm$ ó $mm'>mf$; es decir que el punto m dista del foco menos que de la directriz, y por tanto dicho punto m es interior á la parábola.

Si la perpendicular mm' á la directriz cortase á la $f'n$, se demostraria el teorema de un modo semejante, en virtud de que $nf=nn'=nf'$.

Supongamos ahora (por no variar de figura) que la recta pn tenga con la parábola los dos puntos comunes m y n: digo que todo punto p de la prolongacion de la recta mn es esterior á la parábola.

En efecto, haciendo las mismas construcciones anteriores, los dos triángulos $m'op$ y $f'om$ nos dan $f'p + mm' > f'm + pm'$; restando de los dos miembros de esta desigualdad las partes iguales mm' y $f'm$, resulta $f'p > pm'$, y como $pm' > pp'$, será $f'p > pp'$ ó $pf > pp'$; luego el punto p dista del foco mas que de la directriz, y por lo tanto dicho punto está fuera de la parábola.

Si se tomase un punto en la prolongacion inferior de la recta pn, se veria de un modo análogo, que el punto está fuera de la parábola.

Queda pues demostrado que una recta no puede cortar á la parábola en mayor número de puntos que dos, y que por tanto la parábola es una curva convexa.

TEOREMA 237 (*fig.* 256).

******Los puntos de la parábola van alejándose cada vez mas del eje de esta curva, á medida que el radio vector va creciendo.*

Sean F y DR el foco y la directriz de una parábola, y M un punto de esta curva: bajemos desde este punto M la perpendicular MR á la directriz, prolonguémosla indefinidamente hácia la derecha, y tiremos la recta MF y la perpendicular MM' al eje DE. Señalemos un punto N' sobre el eje y á la derecha del punto M', y levantemos por el punto N' una perpendicular al eje hasta que encuentre á la curva: digo que esta perpendicular es mayor que la MM'. En efecto, el punto en que esta perpendicular encuentra á la parábola, no puede ser el punto P, pues tirando la FP, es $FP < FM + MP$, ó por pertenecer el punto M á la parábola, y ser por lo tanto $FM = MR$, es $FP < MR + MP$ ó $FP < PR$; luego el punto P es interior á la parábola. Tampoco puede estar el punto, en que la perpendicular al eje en el punto N' encuentre á la curva entre los puntos P y N'; pues tirando la FQ á un punto cualquiera comprendido entre P y N', tendremos $FQ < FP$, y con mayor razon $FQ < PR$. Luego el punto en que la perpendicular $N'N$ encuentra á la parábola, está en la prolongacion superior de la PN'; luego su distancia al eje DE es mayor que la MM'.

Corolario. *El eje de la parábola, asi como toda recta paralela á él, no corta á esta curva mas que en un punto* [105].

TEOREMA 238 (*fig.* 257).

La tangente á la parábola divide en dos partes iguales al ángulo FMN *formado por el radio vector del punto de contacto y por la perpendicular bajada desde este punto á la directriz.*

Prolonguemos la NM, y desde un punto cualquiera P de su prolongacion bajemos la perpendicular PQG á la tangente, tomemos sobre ella la parte QG igual á la PQ, y tiremos la MG. Señalemos ahora un punto cualquiera S en la tangente, el cual sea diferente del punto de contacto, y por consiguiente esterior á la curva [106, 2.°], y tiremos las rectas *PS*, *SG*, *SF*, la perpendicular *SR* á la directriz y la *PR*: las dos rectas *PS* y *SG* serán iguales, por ser oblícuas que se apartan igualmente de la perpendicular *MQ*; y como $PS + SF > PS + SR$, y $PS + SR > PR$, y $PR > PN$, será con mayor $PS + SF > PN$, ó $GS + SF > GM + MF$; es decir que el camino mas corto entre los dos puntos *F* y *G* es la línea *FMG*: luego esta línea es recta, ó lo que es igual, la *MG* es prolongacion de la *MF*. Ahora, los dos ángulos *GMQ* y *PMQ* son iguales, porque son iguales los triángulos *GMQ* y *PMQ*; luego los ánlos *FMT* y *NMT*, iguales á los anteriores, son iguales entre sí.

Corolarios. 1.° *La tangente á la parábola forma ángulos iguales con el eje y con el radio vector tirado al punto de contacto*: pues siendo iguales los ángulos *NMT* y *FTM*, como el ángulo *NMT* es igual al ángulo *FTM*, será el ángulo *MTF* igual al ángulo *FMT*.

2.° *El radio vector* FM *tirado al punto de contacto es igual á la distancia del foco al pie* T *de la tangente.*

3.° *La tangente á la parábola forma ángulos iguales con el radio vector del punto de contacto y con la paralela* MP *al eje tirada por este punto.*

Recíproco. *La bisectriz del ángulo formado por el radio vector de un punto de la parábola y por la perpendicular bajada desde este punto á la directriz es tangente á esta curva en dicho punto:* pues siendo la tangente *MT* bisectriz del ángulo *NMF*, como un ángulo no puede tener dos bisectrices, se infiere que la bisectriz coincide con la tangente

Nota. Si una parábola *NOS* (*fig.* 258, *sin las lineas* MR *y* DR) gira al rededor de su eje *OG*, engendrará una superficie llamada *paraboloide de revolucion*. Si la superficie interior de este paraboloide es reflejante, y se coloca un foco luminoso ó calorífico en su foco, es decir, en el foco *F* de la parábola generatriz, los rayos luminosos ó caloríficos que salgan de este foco, se reflejarán paralelamente al eje del paraboloide, es decir, al eje *OG* de la parábola generatriz. En efecto, consideremos uno de estos rayos *FM:* al chocar con la parábola *NMOS* determinada por el eje *OG* y por el mismo rayo *FM*, se reflejará formando el ángulo de reflexion *PMQ* igual al de incidencia *FMT*; y como el ángulo *FMT* es igual al ángulo *MTG*, será este ángulo *MTG* igual al ángulo *QMP*; y por tanto el rayo reflejado *MP* es paralelo al eje *OG*.

PROBLEMA 58 (*fig.* 258).

Tirar una tangente á la parábola por un punto dado en esta curva.

Sea *M* el punto dado: tomo sobre el eje desde el foco hácia la izquierda la parte *FT* igual al radio vector *FM*, y juntando el punto *T* con el *M*, la recta *TM* será la tangente. En efecto, siendo iguales los lados *FM* y *FT* del triángulo *FMT*, los ángulos opuestos *FTM* y *FMT* serán iguales; mas como el ángulo *MTF* es igual al *RMT*, serán iguales los dos ángulos *FMT* y *RMT*; y por tanto la recta *MT*, bisectriz del ángulo *RMF*, es tangente á la parábola en el punto *M*.

PROBLEMA 59 (*fig.* 259).

Tirar desde un punto I *dado fuera de la parábola una tangente á esta curva.*

Desde el punto dado *I* describo con el radio *IF* una circunferencia, que cortará á la directriz en dos puntos *R* y *R'*; por estos puntos tiro las dos paralelas *RM* y *R'M'* al eje, y por último las rectas *IM* é *IM'*, que serán las tangentes pedidas.

En efecto, por hallarse el punto *I* fuera de la parábola, su distancia al foco es mayor que á la directriz; luego la circunferencia *RFR'* cortará á la directriz en dos puntos. Si ahora tiro el radio vector *FM*, y los radios *IF*, *IR*, los dos triángulos *IMF*, *IMR* serán iguales, y por tanto los dos ángulos *IMF*, *IMR* son iguales; luego la *IM* es tangente á la parábola en el punto *M*. Del mismo modo se demuestra que la *IM'* es tambien tangente á la parábola en el punto *M'*.

PROBLEMA 60 (*fig.* 260).

Tirar á la parábola una tangente paralela á una recta dada.

Sea *IG* la recta dada á la cual ha de ser paralela la tangente á la parábola *ME*: desde el foco bajemos una perpendicular á dicha recta, y prolonguemos esta perpendicular hasta que encuentre á la directriz en el punto *R*; tiremos por el punto *R* una paralela *RM* al eje, y por el punto *M* una paralela *MT* á la recta dada, y esta paralela será la tangente pedida. En efecto, tirando el radio vector *FM*, los dos triángulos rectángulos *MOR* y *MOF* son iguales, y por tanto los dos ángulos *RMT* y *FMT* son iguales; luego la paralela *MT* á la recta dada es tangente á la curva.

111. Si llamamos *ordenada* de un punto de la parábola á la perpendicular bajada desde dicho punto al eje, *abscisa* á la parte del eje comprendida entre el vértice y el pie de la ordenada, y *parámetro* al cuádruplo de la distancia del foco al vértice, tendremos el siguiente

TEOREMA 239 (*fig.* 252).

La ordenada de un punto cualquiera de la parábola en me-

dia proporcional entre el parámetro y la abscisa de dicho punto.

Sean x é y la abscisa y ordenada de un punto cualquiera M de la parábola, c la distancia OF, y por consiguiente $4c$ el parámetro: digo que $y^2 = 4cx$.

En efecto, en el triángulo rectángulo FMP tenemos

$$FM^2 = y^2 + (x - c)^2 = y^2 + x^2 - 2cx + c^2;$$

mas $FM = MR = DP = x + c$, y $FM^2 = x^2 + 2cx + c^2$; luego

$$x^2 + 2cx + c^2 = y^2 + x^2 - 2cx + c^2,$$

que se reduce á $y^2 = 4cx$, que es lo que queríamos demostrar.

CAPÍTULO IV.

Hélice.

---

112. Se llama *plomada* un hilo que tiene en un estremo un cuerpo de pequeño volúmen y mucho peso, cuerpo que por lo comun suele ser un cono de metal atado por el centro de su base al estremo del hilo. Cuando el otro estremo del hilo se fija á un punto, y queda la plomada en reposo, la direccion del hilo de la plomada se llama *línea vertical.*

Plano *vertical* es todo plano que pasa por una línea vertical.

Línea *horizontal* es la línea perpendicular á la vertical.

Plano *horizontal* es el plano perpendicular á la línea vertical.

113. Se llama *pendiente* de una recta AB (*fig.* 261) la razon $\frac{BC}{AC}$ del cateto vertical BC al cateto horizontal AC de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es una porcion cualquiera AB de dicha recta. Ordinariamente, para indicar la pendiente de una recta, se suele decir que es 1, 2, 3, etc. por 100; y esto equivale á decir que la pendiente es $\frac{1}{100}, \frac{2}{100}, \frac{3}{100}$, etc., ó que si el cateto horizontal es 100, el vertical es 1, 2, 3, etc.

Pendiente de una curva en un punto es la pendiente de la tangente á la curva en dicho punto.

114. Sea $ABA'B'$ (*fig.* 262) un cilindro cuya base sea horizontal: señalemos un punto A en la circunferencia de la base, y dividamos esta circunferencia en un número cualquiera n de partes iguales, $AF = FG = GH$, etc.; por los puntos de division A, F, G, H, etc. levantemos las perpendiculares AA', FL'', GM'', etc. al plano de la base, las cuales serán lados del cilindro; tomemos ahora, siendo p un número cualquiera entero ó quebrado, $LF = p.AF$, $MG = 2LF$, $NH = 3LF$... $DA = nLF$, $LL' = MM' = NN'$..... $= AD$; y juntando por una curva continua los puntos A,

L, M, N..... D, L', M', etc., resultará en la superficie del cilindro una curva $ACDED'E'A'$, que se llama *hélice*.

Cada una de las porciones ACD, $LCDL'$, $MCDM'$, etc. de esta curva, comprendidas entre dos puntos inmediatos de un mismo lado del cilindro, se llaman *espiras*.

Llamaremos *altura* de un punto de la hélice á la perpendicular bajada desde dicho punto á la base del cilindro; y *arco correspondiente* á un punto de la hélice al arco comprendido entre el orígen A de la hélice y el pie de la altura de dicho punto, pero añadiendo á este arco una circunferencia si el punto de la hélice corresponde á la segunda espira DED', dos circunferencias si corresponde á la tercera espira $D'E'A'$, etc. Segun esto, las alturas de los puntos L, L', L'', etc. son las distancias LF, $L'F$, $L''F$, etc. de dichos puntos á la base; y los arcos correspondientes á los mismos puntos son (llamando C á la circunferencia de la base del cilindro) AF, $AF + C$, $AF + 2C$, etc.

Tenemos ahora, segun la construccion de la hélice, la série de razones iguales

$$\frac{LF}{AF}=\frac{MG}{AG}=\frac{NH}{AH}....=\frac{AD}{C}.$$

De estas razones iguales resultan estas otras iguales á las anteriores, $\frac{LF + AD}{AF + C}$, $\frac{MG + AD}{AG + C}$, etc., ó mas sencillamente $\frac{L'F}{AF+C}$, $\frac{M'G}{AG + C}$, etc., por ser, segun la construccion de la hélice, $LL' = MM'.... = AD$. Tenemos pues la série de razones iguales

$$\frac{LF}{AF}=\frac{MG}{AG}=\frac{NH}{AH}=.....=\frac{AD}{C}=\frac{L'F}{AF + C}=\frac{M'G}{AG + C}=\text{etc.}$$

Luego podemos definir la hélice diciendo, que es una curva de la superficie de un cilindro, en la que se verifica que las alturas de sus puntos son proporcionales á los arcos correspondientes á los mismos.

115. *Paso* de una hélice es la porcion AD, LL', MM', etc. de un lado cualquiera de un cilindro, comprendida entre los estremos de una espira. Segun la construccion de la hélice el paso de esta curva es constante.

116. Llamaremos *subtangente* (*fig.* 263) á la proyeccion TI (sobre el plano de la base del cilindro) de la porcion HT de la tangente á la hélice, comprendida entre el punto H de contacto y el pie T de dicha tangente.

TEOREMA 240 (*fig.* 263).

La subtangente TI *de un punto cualquiera* H *de la hélice es igual en longitud al arco* AI *correspondiente á dicho punto, y es tangente á la base del cilindro en el pie* I *de la altura del punto del contacto.*

Dividamos el arco AI en un número cualquiera n de arcos iguales, y tiremos las cuerdas de estos arcos: sea a la longitud de cada uno y c la de su cuerda, longitudes que pueden llegar á ser menores que cualquiera cantidad dada, y sea GI el último de dichos arcos parciales. Levantemos en el punto G la perpendicular GF á la base del cilindro, tiremos la secante HFS (S es el punto en que corta al plano de la base del cilindro) y la SI, que es la proyeccion de la SFH, y que por lo tanto pasará por el punto G proyeccion del punto F; y por último desde el punto F bajemos la perpendicular FK á la HI. Tenemos por la definicion de la hélice

$$\frac{HI}{\text{arc.}\,AI}=\frac{FG}{\text{arc.}\,AG}=\frac{HI-FG}{\text{arc.}\,AI-\text{arc.}\,AG}=\frac{HK}{a};$$

y pues arc. $AI=na$, será $HI=nHK$: mas por la semejanza de los triángulos HFK, HSI, es $\frac{HI}{SI}=\frac{HK}{FK}$, y como $HI=nHK$, será $SI=nFK$, ó $SI=nc$; es decir, que la proyeccion de la porcion de la secante comprendida entre el punto de contacto y el plano de la base del cilindro es igual en longitud á la línea quebrada formada por todas las cuerdas de los arcos en que se haya dividido el arco AI. Ahora, el límite de la secante $S'HS$ es la tangente $T'HT$ [105], y por tanto el de la proyeccion IS de la porcion HS de la secante es la subtangente TI, la cual por consecuencia es tangente á la base en el punto I: y como el límite de la línea quebrada nc es el arco AI [*Teor.* 88], será en virtud del teorema de los límites $TI=\text{arc.}\,AI$.

Corolario. *La tangente á la hélice forma un ángulo constante con la subtangente, y tambien con el lado que pasa por el punto de contacto:* pues siendo HT (*fig.* 263) una tangente y MO otra, como las dos subtangentes TI, ON son respectivamente iguales á los arcos AI, AN, su razon será la misma que la de estos arcos, y tambien, segun la definicion de la hélice, la misma que la de las alturas HI, MN de los dos puntos de contacto: luego los dos triángulos HTI, MON son semejantes, y por tanto los ángulos HTI, MON son iguales, como tambien los ángulos THI, OMN.

Nota. La pendiente de la hélice en el punto H es $\frac{HI}{TI}$, la de la misma curva en el punto M es $\frac{MN}{ON}$, y como estas dos razones son iguales, se infiere que *la pendiente de la hélice es constante en todos sus puntos.*

PROBLEMA 61 (*fig.* 263).

Tirar una tangente á la hélice por un punto H *de esta curva.*

Tírese la tangente á la base del cilindro por el pie I de la altura del punto dado, tómese en esta tangente la parte IT=arc. AI, y júntense por una recta indefinida los puntos T y H, y esta recta indefinida es la tangente que se pide; puesto que la subtangente del punto H es igual al arco AI correspondiente á dicho punto.

PROBLEMA 62 (*figs.* 261 *y* 264).

Dado el origen A *de una hélice, y conociendo tambien su pendiente* p, *construir esta curva.*

Este problema puede resolverse como lo hemos visto al definir esta curva; pero el método siguiente es mas sencillo.

Construyamos un triángulo rectángulo ABC (*fig.* 261), cuya hipotenusa AB tenga la pendiente p, que ha de tener la hélice, es decir que sea $\frac{BC}{AC}=p$, y apliquemos este triángulo (puede ser de papel ó de otra materia flexible) sobre el cilindro (*fig.* 264), de modo que el cateto AC coincida con un arco AH de la base del cilindro, y entonces la hipotenusa AB se colocará sobre la superficie del cilindro, formando una porcion $AA'N$ de la hélice.

En efecto, un punto cualquiera B' de la hipotenusa caerá sobre el lado respectivo $H'N'$ del cilindro, y su altura $B'C'$ será $N'H'$; mas como $\frac{BC}{AC}=\frac{B'C'}{AC'}=p$, será tambien $\frac{N'H'}{\text{arc. } AH'}=p$; luego el punto N' es un punto de la hélice cuya pendiente es p, y cuyo origen es A. Luego todos los puntos de la hipotenusa AB (*fig.* 261) dan puntos de la porcion AN de la hélice.

Para prolongar el arco AN de la hélice, se coloca el triángulo ABC en la posicion $A'H''N''$, es decir, de modo que la hipotenusa AB tenga una parte comun con el arco AN, y la porcion NN'' será la prolongacion de dicho arco de hélice. En efecto, tenemos $\frac{N''H''}{A'H''}=p$, $\frac{A'F}{AF}=p$; luego $\frac{N''H''+A'F}{A'H''+AF}=p$, ó $\frac{N''I}{AI}=p$; lo que prueba que un punto cualquiera N'' de la prolongacion

NN''' es un punto de la hélice, y que por tanto NN''' es un arco de la hélice pedida.

TEOREMA 241 (*fig.* 265).

Si se desarrolla la superficie ABCD *de un cilindro, en la cual esté trazada una hélice* AEFGH, *cada espira de esta hélice se transforma en la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuya base es igual en longitud á la circunferencia, y cuya altura es el paso de la hélice.*

En efecto, desarrollando la superficie del cilindro, abriéndola por un lado AC, resulta [*Teor.* 165] un rectángulo $A'C'A''C''$, cuya base $A'A''$ es igual á la circunferencia AB rectificada, y cuya altura $A'C'$ es igual á la del cilindro. Consideremos un punto cualquiera E de la espira AEF: este punto se halla en el lado DB del cilindro, lado que en el desarrollo toma la posicion $D'B'$, siendo $A'B' = \text{arc. } AB$; luego dicho punto E caerá en la recta $D'B'$. Por otra parte, si llamamos p á la pendiente de la hélice,

tendremos $$\frac{EB}{\text{arc. } AB} = p,$$

mas tambien $$\frac{E'B'}{A'B'} = \frac{F''A''}{A'A''} = \frac{AF}{C} = p;$$

luego $$\frac{EB}{\text{arc. } AB} = \frac{E'B'}{A'B'},$$

y de aquí resulta $EB = E'B'$, es decir, que la distancia de la nueva posicion del punto E á la base $A'A''$ es igual á la perpendicular $E'B'$ bajada desde el punto E' de la hipotenusa $A'F''$ á la base $A'A''$, y por tanto el punto E de la hélice cae en el punto E' de la hipotenusa $A'F''$; y como el punto E es un punto cualquiera de la espira AEF, queda demostrado que todos los puntos de esta espira caen, al desarrollar la superficie del cilindro, sobre la hipotenusa $A'F''$. Mas el punto A cae en A' y el F en F''; luego la espira AEF, se transforma (cuando se desarrolla la superficie del cilindro) en la hipotenusa $A'F''$.

NOTA I.

SOBRE LA RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS GEOMÉTRICOS.

1. En la Geometría existen tres clases de problemas: 1.° problemas *gráficos*, es decir, problemas en que hay que ejecutar alguna construccion por medio de la regla y el compás; como son los problemas 1, 2, 3, 4.....; 2.° problemas *generales numéricos*, es decir, problemas en que se quiere hallar la ecuacion que liga á varias cantidades geométricas, ó lo que es igual, la relacion que hay entre dichas cantidades; como son los problemas 37, 38, 39.....; 3.° problemas *particulares numéricos*, esto es, casos particulares de los problemas generales, como son los ejemplos de las páginas 72, 79, 80.....

2. En la resolucion de los problemas gráficos pueden seguirse dos métodos: el primero, llamado método *analítico*, consiste en suponer que el problema está resuelto, haciendo un croquis de la construccion que se pide, y en llegar por medio de este croquis á la construccion desconocida; lo que se conseguirá con tanta mayor facilidad, cuanto mejor se sepan los teoremas de la Geometría.

El segundo método, llamado método *sintético*, consiste en ejecutar desde luego la construccion, y en demostrar despues que dicha construccion satisface al problema. Segun esto, el método sintético solo puede seguirse en problemas cuya solucion se conoce; pero en un problema nuevo, ó en un problema cuya solucion se ignora, hay que seguir, y se sigue naturalmente, el método analítico.

Nosotros hemos seguido el método sintético en la esposicion de los problemas gráficos.

3. En la resolucion de los problemas generales numéricos pueden seguirse tambien ambos métodos. Para seguir el método analítico, se supone el problema resuelto, y se halla en consecuencia la relacion pedida.

Hemos seguido este método en los problema generales numéricos.

Para seguir el método sintético en estos problemas, se enuncia un teorema en que se fija la relacion que hay entre la cantidades en cuestion, relacion que por lo tanto debe ser conocida, y se demuestra luego que dicha relacion es cierta.

Por ejemplo, si se quiere esponer sintéticamente el problema 37, se enunciará el teorema siguiente:

El lado de un polígono regular circunscripto es igual al pro-

ducto del radio por el lado del polígono semejante inscripto, dividido por la raiz cuadrada de la diferencia de cuadrados del radio y de la mitad de este lado.

Seguiria la demostracion del mismo modo que en la resolucion analítica de dicho problema.

Asi pues, todo problema general numérico puede considerarse como teorema; y al contrario, todo teorema que dé una relacion entre cantidades, puede esponerse como problema general numérico.

Para que se acabe de comprender esta transformacion de teoremas en problemas y al contrario, se observará que los teoremas 81, 82, 83 y 84 suelen esponerse comunmente en forma de problemas.

Tambien los problemas y teoremas gráficos pueden transformarse en teoremas y problemas: pero en general es poco conveniente esta transformacion.

4. Para resolver un problema particular numérico, se despeja la incógnita en la ecuacion del problema general en que está comprendido el problema particular, y en seguida se ejecutan las operaciones numéricas indicadas por el valor de la incógnita.

Ejemplos. 1.° *Hallar el radio de una esfera, cuyo volúmen es* 10000 *pies cúbicos.*

Despejando la R en la relacion $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ [*Teor.* 223], tendré

$$R=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}.$$

Reemplazando ahora V por su valor particular 10000, será

$$R=\sqrt[3]{\frac{3\times 2500}{\pi}}.$$

2.° *Hallar el radio de la base mayor de un cono troncado de bases paralelas, cuyo volúmen, altura y radio de la base menor son respectivamente* 10000 *pies cúbicos,* 10 *pies y* 3 *pies.*

En la relacion $V=\frac{\pi a}{3}(R^2+r^2+Rr)$

hallada [*Teor.* 219] son conocidas las cantidades V, a y r, y la incógnita es R: por consiguiente hay que resolver una ecuacion completa de segundo grado.

Tendremos $$\frac{3V}{\pi a}=R^2+r^2+Rr \quad [1];$$

$$R^2+Rr=\frac{3V}{\pi a}-r^2,$$

$$R = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{3V}{\pi a} - \frac{3r^2}{4}}.$$

De estos dos valores el segundo es negativo, y por consiguiente no corresponde al problema. El primero es real y positivo, pues la ecuacion [1] nos dice que $\frac{3V}{\pi a}$ es mayor que r^2, y con mayor razon que $\frac{3r^2}{4}$; y tambien, segun la misma ecuacion, $\frac{3V}{\pi a} - \frac{3r^2}{4} > \frac{r^2}{4}$; luego $\sqrt{\frac{3V}{\pi a} - \frac{3r^2}{4}} > \frac{r}{2}$; luego el primer valor de R es real y positivo.

Si siendo los datos arbitrarios, se diera á r un valor, tal que el radical fuese imaginario, ó que el radical, siendo real, fuese menor que $\frac{r}{2}$, el valor de R saldria imaginario ó negativo; y esto daria á entender que el problema particular es imposible, á causa de la incompatibilidad de los datos.

En el problema particular propuesto tendremos $V = 10000$, $a = 10$, $r = 5$; sustituyendo estos valores en el valor de R, resulta:

$$R = -\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{30000}{\pi.10} - \frac{75}{4}},$$

ó

$$R = -\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{3000}{\pi} - \frac{75}{4}}.$$

NOTA II.

SOBRE EL CONO Y CILINDRO OBLICUOS.

Cono oblicuo.

5. Se llama superficie *cónica* la superficie engendrada por una recta indefinida que pasa siempre por un punto dado, y recorre una curva cualquiera.

El punto dado, la curva dada y la recta movible se llaman respectivamente *centro* ó *vértice*, *directriz* y *generatriz* de la superficie cónica.

La superficie cónica se compone de dos superficies separadas por el *vértice*, las cuales se llaman *hojas* de la superficie cónica.

Se llama superficie cónica *circular* la superficie cónica cuya directriz es una circunferencia.

6. Si solo consideramos una hoja de la superficie cónica circular el espacio comprendido dentro de la hoja y el plano de la directriz se llama *cono*, y la circunferencia directriz toma el nombre de *base* del cono.

Eje del cono es la recta tirada desde el vértice al centro de la base.

El cono es *recto*, si el eje es perpendicular á la base; y *oblicuo* si el eje es oblícuo á la base.

El cono recto y el cono engendrado por un triángulo rectángulo que gira al rededor de uno de los catetos [80], son uno mismo, si la generatriz y base del primero son iguales al lado y base del segundo: pues colocados uno sobre otro, de modo que coincidan las dos bases, los ejes de ambos coincidirán tambien [*Teor.* 114]; y como estos dos ejes son iguales, los dos vértices coincidirán, y por tanto los dos conos coinciden.

Segun esto, el cuerpo redondo llamado cono es un cono recto.

TEOREMA 242.

Toda seccion paralela á la base de un cono oblicuo es un círculo, cuyo centro está en el eje.

Se demuestra del mismo modo que el teorema 162, su análogo en el cono recto.

7. La área de la superficie lateral de un cono oblícuo no puede hallarse por la Geometría elemental; pero se puede hallar esta área aproximadamente descomponiéndola en porciones suficientemente estrechas, tirando desde el vértice rectas á varios puntos de la circunferencia de la base, bastante próximos entre

sí para que dichas porciones puedan considerarse sin error de importancia como triángulos.

8. El volúmen de un cono oblícuo entero ó troncado se halla por las mismas reglas que los volúmenes de los conos rectos entero y troncado; y se demuestran las reglas tambien del mismo modo.

9. Si en un triángulo *VAB* (*fig.* 266, *sin las lineas curvas y sin las rectas* EF *y* GH) se tira una recta *CD* que forme con dos lados del triángulo dos ángulos iguales á los de la base, pero trocados, es decir, el ángulo $VCD = B$, y por consiguiente el $VDC = A$, dicha recta *CD* se llama *antiparalela* á la base *AB* del triángulo.

En un cono oblícuo *VAB* (*fig.*266) se llama seccion *principal* el triángulo *VAB* que pasa por el eje, y es perpendicular á la base *AB* [*Teor.* 144].

Fundándose en los teoremas 142 y 119, se demuestra fácilmente que la seccion principal de un cono oblícuo pasa por los dos lados máximo y mínimo de dicho cono.

Si en un cono oblícuo *VAB* se tira por una recta *CD* antiparalela á la base de la seccion principal un plano *CGD* perpendicular á esta seccion, la interseccion *CGD* de dicho plano y el cono se llama seccion *antiparalela* á la base.

TEOREMA 243 (*fig.* 266).

La seccion CGD *antiparalela á la base de un cono oblicuo* VAB *es un circulo.*

Por un punto cualquiera *G* de la curva *CGD* tiremos un plano paralelo á la base del cono, y por consiguiente perpendicular á la seccion principal; la curva interseccion *EGF* será media circunferencia. Siendo los dos planos *EGF* y *CGD* perpendiculares al *VAB*, su interseccion *GH* será [*Teor.* 143] perpendicular al *VAB*, y por consiguiente [54] á las rectas *EF* y *CD* que pasan por su pie *H* en el plano *VAD*.

Siendo la *GH* perpendicular á la *EF*, tendremos $GH^2 = EH \times HF$. Los triángulos *EHC* y *DHF* son semejantes, pues el ángulo $CEH = VAB = HDF$, y tambien los dos ángulos *CHE* y *DHF* son iguales; luego $EH : HD :: CH : HF$, de donde $EH \times HF = HD \times CH$; luego $GH^2 = HD \times CH$, es decir que la *GH* es media proporcional entre las rectas *HD* y *CH*. Mas si en el punto *H* y en el plano *CGD* levantamos una perpendicular á la *CD*, y la prolongamos hasta que encuentre á la circunferencia que, hallándose en el mismo plano, tenga por diámetro á la *CD*, dicha perpendicular será media proporcional entre *CH* y *HD*; luego esta perpendicular es igual á la *HG*, y por tanto el punto *G* es un punto de dicha circunferencia: y como el punto G es un punto cualquiera de la curva $CGDC$, se infiere que todos los puntos de esta curva son puntos de la referida circunferencia. Queda pues demostrado que la seccion $CGDC$, antiparalela á la base del cono, es un círculo.

Cilindro oblicuo.

10. Se llama superficie *cilíndrica* la superficie engendrada por una recta indefinida que, conservándose siempre paralela á sí misma, recorre una curva cualquiera.

La curva dada y la recta movible se llama *directriz* y *generatriz* de la superficie cilíndrica.

Se llama superficie cilíndrica *circular* la superficie cilíndrica cuya directriz es una circunferencia.

TEOREMA 244.

Todo plano paralelo á la directriz de una superficie cilíndrica circular da una circunferencia igual á la directriz en su interseccion con la superficie cilíndrica.

Tirando por el centro de la directriz una paralela á la generatriz, y por esta paralela y varias generatrices planos, se demostrará el teorema, como se demostró el 164.

11. Se llama *cilindro* el espacio $ABMN$ (*fig.* 267 *sin las curvas* CGD, EGF *y las rectas* MN, AB, CD, EF *y* GH) comprendido entre la superficie cilíndrica circular, el plano AB de la directriz y un plano MN paralelo á esta.

Bases del cilindro son los dos círculos que le terminan.

Eje del cilindro es la recta que une los centros de las dos bases.

Cilindro *recto* es aquel cuyo eje es perpendicular á la base; y *oblicuo* es aquel cuyo eje es oblícuo á la base.

El cilindro recto y el cilindro engendrado por un rectángulo que gira al rededor de uno de sus lados [81], son uno mismo, si el eje y la base del primero son iguales al eje y base del segundo: pues colocados uno sobre otro de modo que sus bases coincidan, los ejes coincidirán [*Teor.* 114]; y como estos ejes son iguales, los centros de las otras dos bases coincidirán: luego las otras dos bases coincidirán tambien, y por tanto los dos cilindros coinciden.

Segun esto, el cuerpo redondo llamado cilindro es un cilindro recto.

TEOREMA 245.

12. *El área lateral de un cilindro oblicuo es igual al producto de su lado por la circunferencia de su seccion recta.*

Este teorema se puede demostrar, separando los dos cilindros troncados, y juntándolos por sus dos bases: en cuyo caso reltasu un cilindro recto de bases elípticas, cuya área lateral es el producto de su altura (lado del propuesto) por la circunferencia de su base; lo que se demuestra como el teorema 196. Mas como la rectificacion de una elipse depende del cálculo integral, se puede decir que la geometría elemental no da medios para medir la superficie lateral de un cilindro oblícuo: pero se puede hallar dicha área aproximadamente midiendo por medio de un hilo la seccion recta.

El volúmen de un cilindro oblícuo se halla por la misma regla que el volúmen del cilindro recto, y se demuestra la regla tambien del mismo modo.

Si en un paralelógramo *MABN* (*fig.* 267 *sin las curvas y sin las rectas* EF *y* GH) se tira una recta *CD* que forme con los lados *MA* y *NB* del paralelógramo dos ángulos iguales á los de la base, pero trocados; es decir, el ángulo $MCD = B$, y por consiguiente el ángulo $CDN = A$, dicha recta se llama *antiparalela* á la base *AB* del paralelógramo.

En un cilindro oblícuo *AN* (*fig.* 267) se llama *seccion principal* el paralelógramo *MABN* que pasa por el eje, y es perpendicular á la base [*Teor.* 144].

Si en un cilindro oblícuo *AN* se tira por una recta *CD* antiparalela á la base de la seccion principal un plano *CGD* perpendicular á esta seccion, la interseccion *CGD* de dicho plano y el cilindro se llama seccion *antiparalela* á la base.

TEOREMA 246 (*fig.* 267).

La seccion CGD *antiparalela á la base de un cilindro oblícuo es un círculo igual á la base.*

Se demuestra que esta seccion es un círculo, de un modo análogo al que se ha seguido en la demostracion del teorema correspondiente del cono oblícuo; pero con alguna mayor facilidad, en atencion á que $CH = EH$ y $HD = HF$. Para demostrar que este círculo es igual á la base, tenemos $CH = EH$, $HD = CF$, y por consiguiente $CD = EF = AB$; es decir que los diámetros *CD* y *AB* son iguales; luego el círculo *CD* es igual al círculo *AB*.

NOTA III.

SIMETRÍA.

Simetría con respecto á un punto.

14. Dos puntos se llaman *simétricos* con respecto á otro punto, cuando este divide en dos partes iguales la distancia de los dos primeros.

Dos líneas ó superficies cualesquiera se llaman *simétricas* con respecto á un punto, cuando ambas líneas ó superficies tienen todos sus puntos simétricos respectivamente.

Dos cuerpos cualesquiera se llaman *simétricos* con respecto á un punto, cuando sus superficies son simétricas con respecto al mismo punto.

El punto con respecto al cual son simétricas dos figuras cualesquiera, se llama *centro* de simetría.

TEOREMA 247 (*fig.* 268).

Dos rectas AB, A'B' *que tienen dos puntos* A *y* A', B *y* B' *simétricos con respecto á un punto* O, *tienen todos sus puntos respectivamente simétricos, y por tanto son simétricas.*

En efecto, tiremos por el punto O una recta cualquiera CC', diferente de las AA' y BB', que termine en las dos rectas AB y $A'B'$: los triángulos AOB y $A'OB'$ son iguales, y por consiguiente los ángulos CBO y $C'B'O$ son iguales; luego los triángulos COB y $C'OB'$ son tambien iguales, y por tanto $OC = OC'$; es decir que los puntos C y C' son simétricos con respecto al punto O. Queda pues demostrado que los puntos de las dos rectas son respectivamente simétricos, y que por consiguiente dichas dos rectas son simétricas.

Corolarios. 1.° *Dos puntos distan uno de otro tanto como sus dos simétricos.*

2.° *Dos rectas simétricas con respecto á un punto son paralelas; y si dos móviles salen de dos puntos simétricos de ambas, y se dirigen hácia otros dos simétricos de las mismas, los sentidos de las rectas recorridas serán contrarios.*

3.° *Dos ángulos simétricos son iguales:* pues sus lados son respectivamente paralelos.

TEOREMA 248 (*fig.* 269).

Dos planos ABC *y* A'B'C' *que tienen tres puntos simétricos,* A *y* A', B *y* B', C *y* C', *tienen todos sus puntos simétricos dos á dos, y por consiguiente dichos planos son simétricos.*

Tiremos las rectas AB y BC, y sus simétricas $A'B'$ y $B'C'$: sea P un punto cualquiera del plano ABC, punto diferente de los A, B y C; tiremos por él una recta PMN que corte á las rectas BA y BC, prolongadas si es preciso, en los puntos M y N, cuyos simétricos M' y N' estarán en las rectas $B'A'$ y $B'C'$: por consiguiente la recta $M'N'$ será la simétrica de la MN; luego el punto P tendrá su simétrico P' en la recta $M'N'$, y por tanto en el plano $A'B'C'$. Queda pues demostrado que los puntos de los dos planos ABC, $A'B'C'$ son respectivamente simétricos, y que por tanto dichos planos son simétricos.

Corolario. *Dos planos simétricos con respecto á un punto son paralelos:* pues si A', B', C' son los puntos simétricos de los A, B, C, las dos rectas AB y $A'B'$ serán simétricas, y por tanto paralelas, como tambien las dos rectas BC y $B'C'$; luego los planos simétricos ABC y $A'B'C'$ son paralelos [*Teor.* 130].

TEOREMA 249.

Si dos rectas son simétricas con respecto á un punto, y una de ellas es perpendicular á un plano, la otra será tambien perpendicular al plano simétrico del primero: pues siendo las rectas paralelas y tambien los planos, los dos rectas son perpendiculares á los dos planos.

TEOREMA 250.

Dos poliedros P *y* P' *son simétricos con respecto á un punto, cuando sus vértices son simétricos con respecto al mismo punto.*

En efecto, si A, B, C son tres vértices de una de las caras del poliedro P, y A', B', C' sus simétricos en el poliedro P', las caras que pasan por estos vértices, serán simétricas. Queda pues demostrado que las caras de ambos poliedros son respectivamente simétricas, es decir que las superficies de ambos poliedros son simétricas; y que por tanto estos dos poliedros P y P' son simétricos [14, *Pág.* 191].

TEOREMA 251 (*fig.* 270).

Dos poliedros simétricos con respecto á un punto tienen iguales sus caras simétricas, é iguales tambien los ángulos diedros cuyas aristas son simétricas.

1.° Sea $ABCDE$ una cara de un poliedro, $A'B'C'D'E'$ su simétrica en el poliedro simétrico: siendo por hipótesi A', B', C'... vértices simétricos de los A, B, C... tendremos $AB=A'B'$, $BC=B'C'$, $CD=C'D'$... y además los ángulos $A=A'$, $B=B'$, $C=C'$... Coloquemos la cara $ABCDE$ sobre la $A'B'C'D'E'$, de modo que dos vértices A y B caigan sobre sus simétricos A' y B'; la arista BC coincidirá entonces con la $B'C'$, y el vértice C con el C'; la arista CD coincidirá con la $C'D'$, y el vértice D con el D'; etc. Queda pues demostrado que las caras simétricas son iguales.

2.° Sea CM otra de las aristas que concurran en el ángulo sólido C, y $C'M'$ su simétrica: prolonguemos las del triedro $C'B'D'M'$ en sentido contrario al que tienen, y resultará el triedro $C'B''D''M''$, cuyos ángulos planos y diedros son respectivamente iguales á los del triedro $C'B'D'M'$ [*Teor*. 150]: mas el triedro $C'B''D''M''$ es igual al triedro $CBDM$, por tener sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido, y por tanto respectivamente iguales y colocados en el mismo órden sus ángulos planos; luego los ángulos diedros CB, CD, CM son iguales á los $C'B'$, $C'D'$, $C'M'$. Del mismo modo se demuestra que los otros ángulos diedros formados por caras simétricas son iguales.

TEOREMA 252 (*fig*. 271).

Dos poliedros P′ *y* P″ *simétricos de un tercero* P, *con respecto á dos centros diferentes, son iguales.*

Sean A, B, C tres vértices cualesquiera del poliedro P; A', B', C' sus simétricos en el poliedro P', A'', B'', C'' sus simétricos en el poliedro P'': AB es igual y paralela á las $A'B'$ y $A''B''$, AC es igual y paralela á las $A'C'$ y $A''C''$, BC es igual y paralela á las $B'C'$ y $B''C''$; luego las rectas $A'B'$ y $A''B''$, $A'C'$ y $A''C''$, $B'C'$ y $B''C''$ son iguales y paralelas; luego los triángulos $A'B'C'$ y $A''B''C''$ son iguales y sus planos son paralelos: es decir que el triángulo, cuyos vértices son tres cualesquiera del poliedro P' es igual y paralelo al que forman los tres vértices correspondientes en el poliedro P''. Esto supuesto, coloquemos el poliedro P' de modo que los tres vértices A', B', C' coincidan con los A'', B'', C'' del poliedro P'': entonces otro vértice cualquiera D' del poliedro P' coincidirá tambien con su correspondiente D'' del poliedro P'', pues tirando las rectas $D'A'$ y $D'B'$, $D''A''$ y $D''B''$, como está ya demostrado que el plano $A'B'D'$ es paralelo al $A''B''D''$, y como por la recta $A''B''$ no pueden pasar dos planos paralelos al $A'B'D'$, se infiere que cuando el triángulo $A'B'C'$ coincida con el $A''B''C''$, el plano $A'B'D'$ coincidirá con el $A''B''D''$: y como los triángulos $A'B'D'$ y $A''B''D''$ son iguales, el punto D' caerá sobre el D''. Queda pues demostrado que todos los vértices de los poliedros P' y P'' pueden coincidir, que por lo tanto estos poliedros pueden coincidir, y que por último son iguales.

Simetria con respecto á un plano.

15. Dos puntos se llaman *simétricos* con respecto á un plano, cuando están en una recta perpendicular al plano, y á igual distancia de dicho plano.

Dos líneas ó superficies cualesquiera se llaman *simétricas* con respecto á un plano, cuando todos los puntos de ambas líneas ó superficies son simétricos dos á dos con respecto al mismo plano.

Dos cuerpos cualesquiera se llaman *simétricos* con respecto á un plano; cuando sus superficies son simétricas con respecto al mismo plano.

El plano con respecto al cual son simétricas dos figuras cualesquiera, se llama *plano* de simetría (*a*).

TEOREMA 253 (*fig*. 272).

Si dos figuras P y P′ *son simétricas con respecto á un plano* RS, *y una de ellas* P′ *da media vuelta al rededor de una recta* MN *perpendicular á este plano, se convertirá en una figura* P″ *simétrica de la* P *con respecto al punto* O, *en que la perpendicular* MN *corta al plano de simetría.*

Sea A uno de los puntos de la figura P, A' su simétrico con respecto al plano RS en la figura P': habiendo dado esta figura media vuelta al rededor de la perpendicular MN, la perpendicular $A'O'$ á la MN describirá un semicírculo, y se colocará en su prolongacion $O'A''$. Tiro las dos rectas AO y $A''O$. Las dos rectas AA' y MN perpendiculares al plano RS son paralelas, y como la recta AO tiene dos puntos A y O en el plano de estas dos paralelas, se halla enteramente en él, é igualmente la recta $A'O'A''$, que tiene en este plano los puntos A' y O', se halla enteramente en él; luego tambien la recta $A''O$ se halla en el mismo plano. Los triángulos AaO y $OO'A''$ son iguales, porque $aO = A'O' = O'A''$, $aA = aA' = OO'$, y tambien son iguales los ángulos AaO y $OO'A''$ por ser rectos: por consiguiente $AO = A''O$, y además los ángulos AOa y $OA''O'$ son iguales, de donde se deduce que las dos rectas AO y OA'' forman una sola recta: luego los puntos A'' y A son simétricos con respecto al punto O. Queda pues demostrado que la figura P'' tiene todos sus puntos respectivamente simétricos de los de la figura P con respecto al punto O; luego estas dos figuras son simétricas con respecto á dicho punto O.

Recíproco. *Si dos figuras* P *y* P″ *son simétricas con respecto á un punto* O, *y una de ellas* P″ *da media vuelta al rededor de una recta* MN *que pasa por el centro* O *de simetría, se convertirá en una figura* P′ *simétrica de la figura* P *con respecto al plano* RS *que pasa por dicho centro* O, *y es perpendicular á dicha recta* MN.

Cuando la figura P'' haya dado la media vuelta, la perpendi-

(*a*) La imágen de una figura en un espejo plano es simétrica de dicha figura, y el plano de simetría es el del espejo.

cular $A''O'$ bajada á la recta MN desde un punto cualquiera A'' de la misma figura habrá descrito un semicírculo, y se habrá colocado en la posicion $O'A'$, prolongacion de su posicion primitiva $O'A''$. Tiro ahora la recta AA', y junto el punto a, en que corta al plano RS, con el punto O. Siendo $AO = A''O$ y $A'O' = A''O'$, la recta OO' será paralela á la AA' [*Teor.* 55, *Recip.*]; luego esta es perpendicular al plano RS. Los triángulos $A''OO'$ y AOa tienen iguales los lados OA'' y OA, $aO = A'O' = O'A''$, y son rectángulos; luego dichos triángulos son iguales, y por tanto $OO' = aA' = Aa$; es decir que los puntos A' y A son simétricos con respecto al plano RS. Queda pues demostrado que los puntos de las figuras P' y P son simétricos con respecto al plano RS; luego estas dos figuras son simétricas con respecto á dicho plano.

Fácil será ahora demostrar en virtud de estos dos teoremas, y aun directamente, los siguientes.

Dos rectas que tienen dos puntos simétricos con respecto á un plano, son simétricas con respecto al mismo plano; y si dichas rectas no son paralelas, encontrarán al plano de simetria en un mismo punto, y formarán con él á uno y otro lado del mismo dos ángulos iguales.

Dos ángulos simétricos con respecto á un plano, son iguales.

Dos planos que tienen tres puntos simétricos con respecto á un plano, son simétricos con respecto al mismo plano; y si dichos planos no son paralelos, encontrarán al plano de simetria en una misma recta, y formarán con él á uno y otro lado del mismo dos ángulos diedros iguales.

Si dos rectas son simétricas y una de ellas es perpendicular á un plano, la otra es tambien perpendicular al plano simétrico del primero.

Dos poliedros son simétricos con respecto á un plano, cuando sus vértices son simétricos con respecto al mismo plano.

Dos poliedros simétricos con respecto á un plano tiene iguales sus caras simétricas, y tambien sus ángulos diedros cuyas aristas son simétricas.

TEOREMA 254.

Dos poliedros P′ *y* P″ *simétricos de un poliedro* P, *el primero con respecto á un plano, y el segundo con respecto á un punto, son iguales:* pues dando media vuelta al poliedro P', al rededor de una perpendicular al plano de simetria, resulta un poliedro P″ simétrico del P con respecto al pie de dicha perpendicular; luego los dos poliedros P''' y P'', simétricos de uno mismo P con respecto á dos centros diferentes, son iguales [*Teor.* 252].

TEOREMA 255.

Dos poliedros P′ *y* P″ *simétricos de un tercero* P *con respecto á dos planos diferentes son iguales:* pues dando media vuelta uno de los dos poliedros, por ejemplo el *P′*, al rededor de una recta perpendicular al plano de simetría, se convierte el mismo poliedro en otro *P‴* simétrico del poliedro *P* con respecto á un punto; y por consiguiente, segun el teorema anterior, dicho poliedro *P‴* ó *P′* es igual al *P″*.

NOTA. Dos poliedros simétricos no pueden coincidir en general; pues los ángulos triedros formados por tres aristas cualesquiera de un ángulo sólido del poliedro, y por sus tres simétricas en el otro poliedro, no pueden coincidir en general [*Teor.* 150]; luego tampoco puede coincidir en general los ángulos sólidos de los poliedros simétricos: no pudiendo coincidir los ángulos sólidos de ambos poliedros, tampoco pueden coincidir estos poliedros (*a*).

TEOREMA 256 (*fig.* 273).

Si dos poliedros P *y* P′ *son simétricos con respecto á un plano* RS, *y uno de ellos* P *tiene un plano* BAC *que le divida en dos poliedros* p *y* q *simétricos con respecto al mismo, los dos poliedros propuestos* P *y* P′ *pueden coincidir; y por tanto son iguales.*

Sea *B′A′C′* el plano simétrico del *BAC* con respecto al plano *RS*: los puntos de los dos planos *BAC* y *B′A′C′* serán respectivamente simétricos. Sean *a* y *b* dos vértices del poliedro *P* simétricos con respecto al plano *BAC*, será la *ab* perpendicular al plano *BAC*, y ademas serán iguales *ao* y *bo*, siendo *o* el punto en que esta recta *ab* corta al plano *BAC*. Sean *a′* y *b′* los dos puntos del poliedro *P′* simétricos de los *a* y *b* con respecto al plano *RS*: hallándose el punto *o* en el plano *BAC*, su simétrico *o′* se hallará en el plano *B′A′C′* simétrico del *BAC*; y siendo *o* el punto medio de la *ab*, su simétrico *o′* será tambien el punto medio de la *a′b′*. Vemos pues que el poliedro *P′* está dividido por el plano *B′A′C′* en otros dos *p′* y *q′* cuyos vértices son simétricos dos á dos con respecto al mismo plano: luego este plano es un plano de simetría del poliedro *P′*.

Vemos además que los vértices *a* y *a′* son por suposicion simétricos con respecto al plano *RS*, como tambien los vértices *b* y *b′*; y que por tanto los vértices de los dos poliedros

(*a*) Lo mismo sucede en general con dos cuerpos simétricos. Asi, los espacios que ocupan las dos manos de una persona, que son dos cuerpos simétricos, no pueden coincidir; como se ve fácilmente observando que la mano derecha no puede ajustarse al guante de la izquierda.

p y p', q y q' son simétricos dos á dos con respecto al plano RS; luego el poliedro p es simétrico del p' con respecto á este plano: mas tambien el poliedro q' es simétrico del p' con respecto al plano $B'A'C'$; luego [*Teor*. 255] los dos poliedros p y q' simétricos del poliedro p' son iguales. Por la misma razon los dos poliedros q y p' son iguales. Pueden por lo tanto coincidir los dos poliedros p y q', y los dos q y p'; luego pueden coincidir los dos poliedros P y P'.

TEOREMA 257.

Dos poliedros simétricos P y P′ *tienen igual volúmen.*

Separemos del poliedro P un tetraedro t cuyos cuatro vértices pertenezcan á este poliedro, y del poliedro P' el tetraedro t' simétrico del t, es decir cuyos cuatro vértices sean simétricos de los del tetraedro t. Volvamos á separar de los dos poliedros restantes otros dos tetraedros simétricos; y continuando esta misma operacion, quedarán ambos poliedros P y P' descompuestos en un mismo número de tetraedros cuyos vértices eran, antes de la descomposicion, respectivamente simétricos. Si ahora volvemos á colocar estos tetraedros en la posicion que tenian en un principio, resultarán los dos poliedros simétricos propuestos; luego estos se componen de un mismo número de tetraedros respectivamente simétricos.

Esto supuesto, si tomamos por bases de dos tetraedros simétricos t y t' dos caras simétricas, estas bases serán iguales [*Teor*. 251]. Bajemos la altura del tetraedro t, y tiremos por la cúspide del tetraedro t' la recta simétrica de dicha altura: esta recta será perpendicular á la base del tetraedro t' [*Teorema* 249], y por lo tanto será la altura de este tetraedro. El pie de la altura del tetraedro t pertenece á la altura y base de este tetraedro, y por tanto su punto simétrico se hallará en la altura y base del tetraedro t'; es decir que el pie de la altura del tetraedro t' es el punto simétrico del pie de la altura del tetraedro t. Luego las alturas de los dos tetraedros t y t' tienen sus estremos simétricos, por lo cual dichas alturas son iguales. Luego los dos tetraedros simétricos t y t' tienen sus bases iguales y sus alturas tambien iguales; luego tienen igual volúmen. Mas ya hemos demostrado que los dos poliedros P y P' se componen de un mismo número de tetraedros respectivamente simétricos; luego dichos dos poliedros tienen igual volúmen.

ÍNDICE.

Páginas.

INTRODUCCION.. 1

GEOMETRÍA PLANA.

LIBRO I.—LÍNEA RECTA Y ÁNGULOS.

CAP. I. Perpendiculares y oblícuas........................ 4
CAP. II. Paralelas.. 7

LIBRO II.—POLÍGONOS.

CAP. I. Triángulos.. 11
CAP. II. Polígonos en general............................. 19

LIBRO III.—CÍRCULO.

CAP. I. Líneas rectas en el círculo....................... 23
CAP. II. Interseccion y contacto de dos circunferencias... 27
CAP. III. Medida de los ángulos........................... 29
Problemas correspondientes á los tres libros primeros..... 34

LIBRO IV.—POLÍGONOS SEMEJANTES, Y REGULARES.

CAP. I. Líneas proporcionales............................. 47
CAP. II. Polígonos semejantes............................. 49
CAP. III. Polígonos regulares............................. 58
Problemas relativos al libro IV........................... 66

LIBRO V.—ÁREAS DE LOS POLÍGONOS Y DEL CÍRCULO.

CAP. I. Áreas de los polígonos............................ 73
CAP. II. Área del círculo................................. 78
CAP. III. Comparacion de las áreas........................ 82
Problemas relativos al libro V............................ 88

GEOMETRÍA DEL ESPACIO.

LIBRO I.—PLANOS, ÁNGULOS DIEDROS Y ÁNGULOS POLIEDROS.

CAP. I. Perpendiculares y oblícuas á un plano............. 91
CAP. II. Paralelismo en el espacio........................ 95
CAP. III. Ángulos diedros................................. 100
CAP. IV. Ángulos poliedros................................ 106

LIBRO II.—POLIEDROS.

CAP. I. Pirámides.. 114

CAP. II. Prismas.. 116

LIBRO III.—LOS TRES CUERPOS REDONDOS.

CAP. I. Cono y cilindro.. 118

CAP. II. Esfera.. 121

LIBRO IV.—POLIEDROS SEMEJANTES, Y REGULARES.

CAP. I. Poliedros semejantes.. 131

CAP. II. Poliedros regulares.. 134

LIBRO V.—ÁREAS Y VOLÚMENES DE LOS POLIEDROS Y CUERPOS REDONDOS.

CAP. I. Áreas de los poliedros.. 137

CAP. II. Áreas de los cuerpos redondos.. 138

CAP. III. Comparacion de las áreas.. 146

CAP. IV. Volúmenes de los poliedros.. 147

CAP. V. Volúmenes de los cuerpos redondos.. 156

CAP. VI. Comparacion de los volúmenes.. 160

ESTUDIO ELEMENTAL DE LAS CURVAS ELIPSE, PARÁBOLA Y HÉLICE.

CAP. I. Nociones preliminares.. 164

CAP. II. Elipse.. 165

CAP. III. Parábola.. 173

CAP. IV. Hélice.. 179

NOTA I.

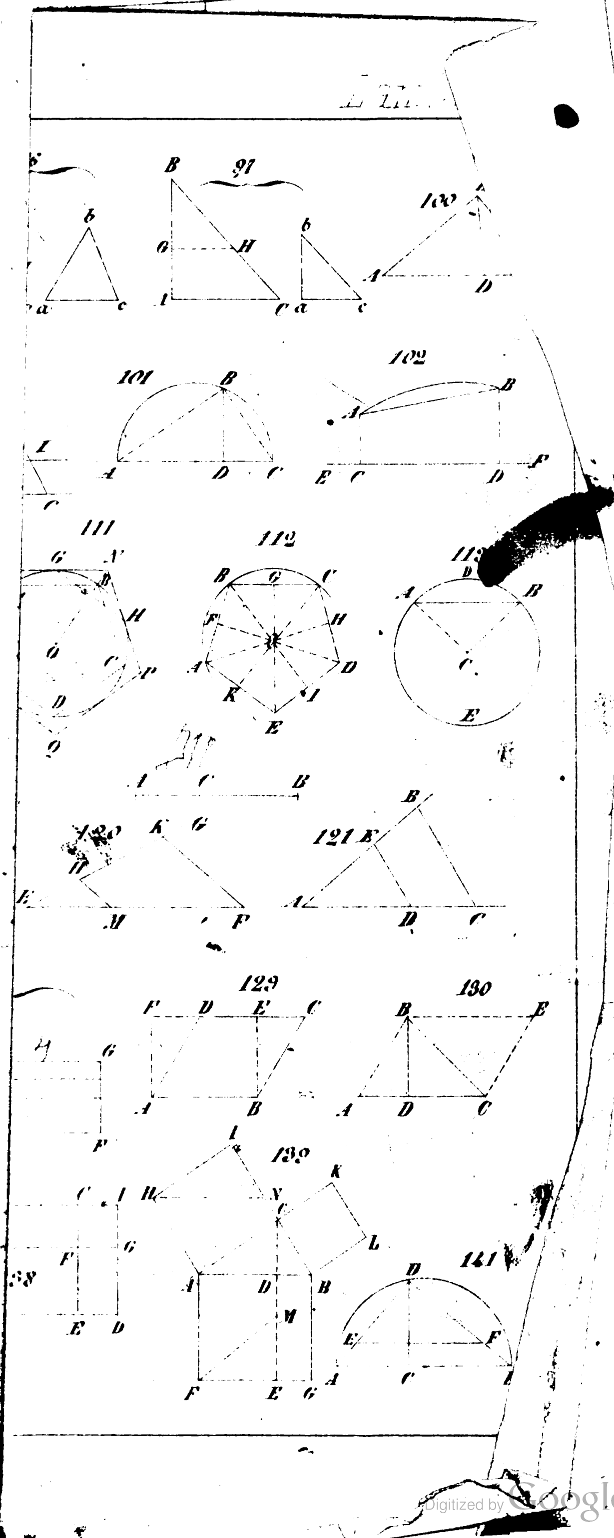
Sobre la resolucion de los problemas geométricos.. 184

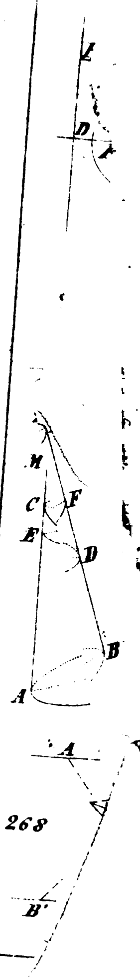
NOTA II.

Sobre el cono y cilindro oblícuos.. 187

NOTA III.

Simetría.. 191


97
101
102
111
112
120
121
129
130
132
141



268